יסודות ההסתברות

פרק 38 - קשרים בין התפלגויות מיוחדות

תוכן העניינים

התפלגות סכום התפלגויות פואסוניות בלתי תלויות:

רקע:

קיימות n התפלגויות פואסוניות בלתי תלויות זו בזו: $i=1,2,\dots,n$, $X_i \sim P(\lambda_i)$.

ניצור משתנה מקרי חדש שהוא סכום של n ההתפלגויות הללו: $\sum_{i=1}^{n} X_i$.

משתנה חדש זה מתפלג גם הוא פואסונית עם פרמטר: $\lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$.

לסיכום, אם: $i=1,2,\dots,n$, $X_i \sim P(\lambda_i)$ והמשתנים בלתי תלויים זה בזה,
אז מתקיים: $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim P\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)$.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

מפעל ממתקים מייצר סוכריות ג'לי בזרם פואסוני. הסוכריות נוצרות בצבעים כתום, ירוק, אדום וסגול. להלן טבלה אשר מציגה את תוחלת מספר הסוכריות שנוצרות בכל אחד מהצבעים בשניית ייצור במפעל. מספר הסוכריות שנוצרות בשנייה כלשהי בכל אחד מהצבעים בלתי תלוי במספר הסוכריות בצבעים האחרים.

צבע	תוחלת
כתום	4
ירוק	3
אדום	3
סגול	2

א. מה ההסתברות שבשנייה כלשהי ייוצרו בדיוק 14 סוכריות ג'לי במפעל?

ב. מה ההתפלגות של מספר סוכריות הג'לי שמיוצרות בדקה כלשהי במפעל?

ג. מה ההסתברות שבשנייה כלשהי המפעל ייצר 3 סוכריות כתומות ו-8 סוכריות בצבעים אחרים?

תשובה:

א. $P(T=14)=e^{-12}\cdot\frac{12^{14}}{14!}=0.0905$.

ב. $T_j \sim P(12)$ מספר סוכריות שמיוצרות בשנייה j , $\sum_{j=1}^{60} T_j \sim P(12\cdot 60=720)$.

ג. $P(X_1=4\cap T=8)-P\left(X_1=4\cap\sum_{i=2}^{4} X_i=4\right)=P(X_1=4)\cdot P\left(\sum_{i=2}^{4} X_i=4\right)=\frac{e^{-4}\cdot 4^4}{4!}\cdot\frac{e^{-8}\cdot 8^4}{4!}=0.0112$.

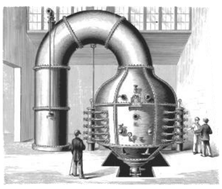
שאלות:

1) איזבלה היא רשת של חנויות בגדים. לרשת שלוש חנויות שהרכישות בהן נעשות בזרם פואסוני. בחנות A קצב הרכישות הוא 1 ל-10 דקות, בחנות B קצב הרכישות הוא 1 לשעה, ובחנות C קצב הרכישות הוא 2 לרבע שעה. אין תלות בין מספרי הרכישות בחנויות הרשת השונות.

א. מהי התוחלת ומהי סטיית התקן של מספר הרכישות בכלל חנויות הרשת בשעה?

ב. מה ההסתברות שבשעה כלשהי מספר הרכישות בחנויות הרשת יהיה לכל היותר 5?

2) במפעל פועלות שתי מכונות. מספר התקלות במכונה א׳ מתפלג פואסונית עם תוחלת של 2 תקלות ליום, ומספר התקלות במכונה ב׳ מתפלג פואסונית עם תוחלת של תקלה אחת ביום.



מספרי התקלות במכונות השונות בלתי תלויים זה בזה.

א. מה ההתפלגות של מספר התקלות במפעל ביום?

ב. מה ההסתברות שביומיים מסוימים כלל לא יהיו תקלות במפעל?

ג. מה ההסתברות שביומיים מסוימים יהיו במפעל בדיוק 5 תקלות, שמהן בדיוק 3 תקלות במכונה א׳?

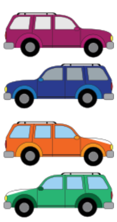
3) נתון ש- $i=1,2,3$, $X_i \sim P(1)$ והמשתנים בלתי תלויים זה בזה.

נגדיר את Y באופן הבא: $Y=\sum_{i=1}^{3} X_i$.

א. מהי התוחלת ומהי השונות של Y?

ב. חשבו את: $E|Y-2|$.

4) לצומת נכנסות מכוניות מ-3 כיוונים שונים. מספר המכוניות הנכנסות מכיוון i הוא משתנה מקרי שמתפלג פואסונית עם פרמטר i מכוניות לשעה כש- $i=1,2,3$. אין תלות בין מספרי המכוניות המגיעות לצומת מכיוונים שונים. W הוא משתנה מקרי שמייצג את מספר המכוניות המגיעות לצומת בשעה משלושת הכיוונים יחד.



א. חשבו את: $P(W=k|W>0)$, $k=1,2,3,...$.

ב. חשבו את: $E\left(\frac{1}{1+W}\right)$.

5) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו שאם: $X_1 \sim P(\lambda_1)$ ו- $X_2 \sim P(\lambda_2)$ והמשתנים בלתי תלויים זה בזה, אז מתקיים: $X_1 + X_2 \sim P(\lambda_1 + \lambda_2)$.

ב. הוכיחו שאם: $i = 1, 2, ..., n$, $X_i \sim P(\lambda_i)$ והמשתנים בלתי תלויים זה בזה, אז מתקיים: $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim P\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)$.

תשובות סופיות:

1) א. תוחלת: 15, סטיית תקן: $\sqrt{15}$. ב. 0.0028.

2) א. פואסונית עם פרמטר 3. ב. 0.0025. ג. 0.0529.

3) א. תוחלת: 3, שונות: 3. ב. $\frac{10}{e^3} + 1$.

4) א. $\frac{e^{-6} \cdot 6^k}{k! \cdot (1 - e^{-6})}$. ב. $\frac{e^{-6} \cdot (e^6 - 1)}{6}$.

5) שאלת הוכחה.

התפלגות סכום התפלגויות בינומיות בלתי תלויות:

רקע:

אם יש כמה משתנים מקריים בלתי תלויים זה בזה שלכל אחד מהם התפלגות בינומית עם אותו פרמטר p , סכום המשתנים יתפלג בינומית עם פרמטר p.
באופן יותר מפורט:

אם X_i הוא משתנה מקרי שמתפלג בינומית עם הפרמטרים (n_i, p) לכל: $i=1,2,\ldots,m$,

והמשתנים בלתי-תלויים זה בזה, אז $\sum_{i=1}^{m} X_i$ הוא משתנה מקרי בינומי עם

הפרמטרים: $\left(\sum_{i=1}^{m} n_i, p\right)$.

דוגמה:

ערן מטיל קובייה ארבע פעמים, ודינה מטילה קובייה פעמיים.
מהי התפלגות מספר הפעמים שבהן ערן ודינה קיבלו תוצאה קטנה מ-3?
מהי תוחלת מספר הפעמים שבהן ערן ודינה קיבלו תוצאה קטנה מ-3?

תשובה:
ב"ת

$X_1 \sim B\left(n_1=4, P=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}\right)$ - מספר הפעמים שערן קיבלת פחות מ-3.

$X_2 \sim B\left(n_2=2, P=\frac{1}{3}\right)$ - מספר הפעמים שדינה קיבלת פחות מ-3.

$$X_1+X_2 \sim B\left(n=4+2=6, P=\frac{1}{3}\right)$$
$$X \sim B(n,p) \Rightarrow E(x)=n\cdot P$$
$$E(X_1+X_2)=6\cdot\frac{1}{3}=2$$

שאלות:

1) יוסי מטיל מטבע ארבע פעמים, ודנה מטילה מטבע שש פעמים.
אם X הוא סך הפעמים שיוסי ודנה יקבלו עץ.

א. מה ההתפלגות של X?

ב. מה התוחלת ומה השונות של X?

2) במבחן שני חלקים. חלק א' כולל 10 שאלות עם 4 תשובות אפשריות שרק אחת מהן נכונה. חלק ב' כולל 10 שאלות מסוג נכון או לא נכון.
סטודנט ניגש לבחינה ומנחש את כל התשובות בבחינה.

א. מה ההסתברות שהסטודנט יענה נכון לכל היותר על 3 שאלות?

ב. מה התוחלת ומה השונות של מספר התשובות הנכונות בבחינה של הסטודנט?

3) רונן הזמין למסיבת יום ההולדת שלו 18 אורחים – 10 גברים ו-8 נשים.
כל גבר יגיע למסיבה בהסתברות 0.7, וכל אישה תגיע למסיבה בהסתברות 0.9.
ידוע שאין תלות בין הגעת גבר אחד להגעתו של גבר אחר, בין הגעת אישה אחת להגעתה של אחרת ובין הגעת גבר להגעתה של אישה.

א. מה ההסתברות שיגיעו למסיבה בדיוק 9 גברים ו-8 נשים?

ב. מה הסיכוי שיגיעו למסיבה לפחות 17 אורחים?

4) נתון ש: $Y \sim B(3,0.6)$, $X \sim B(2,0.5)$. ידוע ש- X ו- Y בלתי תלויים זה בזה.

א. מצאו את ההתפלגות של $X+Y$.

ב. מצאו את: $P(X+Y=2 \mid X>0)$.

5) נתון ש- X ו- Y הם משתנים מקריים בלתי-תלויים. X מתפלג בינומית עם הפרמטרים n, p ו- Y מתפלג בינומית עם הפרמטרים m ו- p .
האם גם המשתנים המקריים X ו- $W=X+Y$ בלתי-תלויים זה בזה?

6) X ו- Y הם משתנים מקריים בלתי-תלויים. X מתפלג בינומית עם הפרמטרים n_X, p ו- Y מתפלג בינומית עם הפרמטרים n_Y ו- p .
הוכיחו ש- $X+Y$ מתפלג בינומית עם הפרמטרים: n_x+n_Y ו- p.

תשובות סופיות:

1) א. $X \sim B(10,0.5)$. ב. $E(X)=5$, $V(X)=2.5$.
2) א. 0.0178. ב. תוחלת: 7.5, שונות: 4.375.
3) א. 0.0521. ב. 0.0751.
4) א. עיין בסרטון הוידאו. ב. 0.2133.
5) המשתנים תלויים.
6) שאלת הוכחה.

התפלגות סכום התפלגויות גיאומטריות בלתי תלויות:

רקע:

אם יש כמה משתנים מקריים בלתי תלויים זה בזה שלכל אחד מהם התפלגות גיאומטרית עם אותו פרמטר p, סכום המשתנים יתפלג בינומית שלילית עם פרמטר p. באופן יותר מפורט:

אם X_i הוא משתנה מקרי שמתפלג גיאומטרית עם הפרמטר p לכל: $i=1,2,...,m$,

ואם ידוע שהמשתנים בלתי-תלויים זה בזה, אז $\sum_{i=1}^{m} X_i$ הוא משתנה מקרי שמתפלג בינומית שלילית עם הפרמטרים (m,p).

דוגמה:

עודד משחק בשני שלבים:
בשלב הראשון הוא מטיל קובייה עד אשר הוא מקבל את התוצאה 1.
ברגע שהוא מקבל את התוצאה 1 הוא עובר לשלב השני,
ובו הוא שוב מטיל את הקובייה עד שהוא מקבל את התוצאה 4.

א. מהי ההתפלגות של מספר ההטלות בשלב הראשון?

ב. מהי ההתפלגות ש מספר ההטלות בשלב השני?

ג. מהי ההתפלגות של מספר ההטלות במשחק?

תשובות (פתרון בהקלטה):

א. X_1 = מספר ההטלות בשלב הראשון, $X_1 \sim G\left(\frac{1}{6}\right)$.

ב. X_2 = מספר ההטלות בשלב השני, $X_2 \sim G\left(\frac{1}{6}\right)$.

ג. $X_1 + X_2 \sim NB\left(2,\frac{1}{6}\right)$.

שאלות:

1) יוסי מטיל מטבע עד לקבלת "עץ", ודנה מטילה מטבע (באופן לא תלוי ביוסי) עד לקבלת "פָּלִי". X הוא מספר ההטלות של יוסי ודנה יחד.

א. מה ההתפלגות של X?

ב. מה התוחלת ומה השונות של X?

2) אדם מנסה להתקשר למוקד שירות. הוא מתקשר עד אשר יקבל מענה. ההסתברות למענה במוקד השירות היא 0.4 בכל פעם, ללא תלות בניסיונות האחרים. אחרי שסיים את השיחה שבה קיבל מענה, האדם נזכר ששכח לשאול שאלה נוספת. הוא מתקשר שוב למוקד השירות עד לקבלת מענה.

א. מה ההסתברות שבסך הכול האדם התקשר למוקד השירות שש פעמים?

ב. מה ההסתברות שבסך הכול האדם התקשר למוקד השירות שבע פעמים, אם ידוע שבפעם הראשונה הוא נאלץ להתקשר שלוש פעמים עד לקבלת מענה?

3) X_i הוא משתנה מקרי גיאומטרי עם הפרמטר 0.2 לכל: $i=1,2,\dots,5$, וכמו כן נתון ש- $X_1,X_2,\dots,X_5$. בלתי-תלויים זה בזה.

א. מה ההסתברות ש: $\sum_{i=1}^{5} X_i = 5$?

ב. חשבו את: $P\left(\sum_{i=1}^{5} X_i = 12 \mid X_1 = 2\right)$.

4) נתון ש: $Y \sim G(0.6)$, $X \sim G(0.5)$. X ו- Y בלתי-תלויים זה בזה.

א. מצאו את ההתפלגות של $X+Y$.

ב. מצאו את: $P(X+Y=2 \mid X>0)$.

5) X ו- Y הם משתנים מקריים בלתי-תלויים.
X מתפלג גיאומטרית עם הפרמטר p ו- Y מתפלג גיאומטרית עם הפרמטר p. הוכיחו ש- $X+Y$ מתפלג בינומית שלילית עם הפרמטרים 2 ו- p.

6) הוכיחו את הטענה: אם X_i הוא משתנה מקרי שמתפלג גיאומטרית עם הפרמטר p לכל: $i=1,2,\dots,m$ ואם: $X_1,X_2,\dots,X_m$. בלתי-תלויים זה בזה, אז $\sum_{i=1}^{m} X_i$ הוא משתנה מקרי שמתפלג בינומית שלילית עם הפרמטרים (m,p).

תשובות סופיות:

1) א. $X \sim NB\left(2,\frac{1}{2}\right)$. ב. תוחלת: 4, שונות: 4.

2) א. 0.10368. ב. 0.0864.

3) א. 0.00032. ב. 0.0352.

4) א. $k=2,3,\ldots$, $P\left(X+Y=k\right)=6\cdot4^k\left(1.25^k-1.25\right)$. ב. 0.3.

5) שאלה הוכחה.

6) שאלת הוכחה.

התפלגות מותנית בסכום התפלגויות פואסוניות בלתי תלויות:

רקע:

אם X ו- Y הם משתנים מקריים בלתי-תלויים המתפלגים פואסונית עם הפרמטרים λ_1 ו- λ_2 בהתאמה, אז ההתפלגות של המשתנה המקרי המותנה X בהינתן $X+Y=n$ היא בינומית עם הפרמטרים n ו- $\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$.

דוגמה:

מספר בני האדם הנכנסים לבית קפה מסוים בשעה מתפלג פואסונית עם ממוצע 6. מספר הכלבים הנכנסים לבית הקפה בשעה מתפלג פואסונית עם שונות 1. נניח שאין תלות בין השניים.
מה הסיכוי שבשעה האחרונה נכנסו לבית הקפה בדיוק שני כלבים, אם ידוע שבסך הכול נכנסו שבעה בני אדם וכלבים?

תשובה:

$X \sim P(\lambda_1=1)$ - מספר הכלבים הנכנסים בשעה.

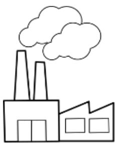
$Y \sim P(\lambda_2=6)$ - מספר בני האדם הנכנסים בשעה.

X,Y ב"ת.

$$X \sim P(\lambda_1)$$
$$Y \sim P(\lambda_2)$$
$$\Downarrow$$
$$X | X+Y=n \sim B\left(n,\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_1}\right)$$
$$X | X+Y=7 \sim B\left(7,\frac{1}{7}\right)$$
$$P(X=2 | X+Y=7)=\binom{7}{2}\cdot\left(\frac{1}{7}\right)^2\cdot\left(\frac{6}{7}\right)^5=0.1983$$

שאלות:

1) מספר הפסקות החשמל היזומות במפעל זורקס מתפלג פואסונית עם תוחלת של 2 בחודש. מספר הפסקות החשמל הלא-יזומות במפעל מתפלג פואסונית עם תוחלת של 3 בחודש. מספר הימים בחודש כלשהו זניח. אין תלות בין מספר ההפסקות היזומות למספר ההפסקות שאינן יזומות.



א. מה הסיכוי שברבעון הראשון של השנה יהיו בדיוק 5 הפסקות חשמל במפעל וגם שבחודש ינואר של אותה שנה תהיה בדיוק הפסקה אחת?

ב. מהי התוחלת של מספר החודשים שיעברו מינואר 2020 ועד החודש הראשון שבו לא יהיו כלל הפסקות חשמל?

ג. אם בחודש מרץ הבא יהיו בדיוק 6 הפסקות חשמל במפעל זורקס, מה התוחלת של מספר ההפסקות היזומות שיהיו באותו החודש?

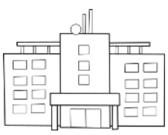
2) מספר המכירות המתרחשות בשעה בחנות הצעצועים טויזים מתפלג פואסונית עם תוחלת של 6 בשעה. החנות פתוחה בכל יום במשך שמונה שעות, מהשעה 11:00.

א. מה ההסתברות שבשעה מסוימת יהיו לפחות 3 מכירות בחנות הצעצועים טויזים?

ב. מה ההסתברות שבשעה הראשונה שלאחר פתיחת החנות יהיו 4 מכירות, אם באותו היום יהיו בסך הכול 50 מכירות?

ג. בכל יום מנהל החנות מקבל דוח ובו פירוט של מספר הרכישות שהיו בכל שעה שלמה מאז פתיחת החנות. מה ההסתברות שמחר, מתוך שמונה השעות שבהן החנות פתוחה, תהיה בדיוק שעה אחת שבה יהיו בדיוק 5 רכישות?

3) מספר הגברים המגיעים לטיפול בחדר המיון של בית החולים סורוקה מתפלג פואסונית בקצב של 2 לשעה. מספר הנשים המגיעות לטיפול באותו חדר מיון מתפלג פואסונית בקצב של 1 לשעה. אין תלות בין מספר הגברים המגיעים לחדר המיון ובין מספר הנשים המגיעות אליו.



א. מה ההסתברות שבשעה מסוימת יגיע לפחות אדם אחד לטיפול בחדר המיון של בית החולים סורוקה?

ב. אם בשעה מסוימת הגיעו לטיפול בחדר המיון של בית החולים סורוקה בדיוק 5 אנשים, מה ההסתברות שמתוכם יש בדיוק 2 נשים?

ג. אם ביממה מסוימת הגיעו לטיפול בחדר המיון של בית החולים סורוקה בדיוק 60 אנשים, מהי השונות של מספר הגברים שהגיעו לטיפול בחדר המיון באותה היממה?

4) בסניף דואר מסוים יש שלושה אשנבים (1, 2 ו-3). מספר האנשים הפונים לאשנב 1 במשך דקה הוא משתנה מקרי המתפלג פואסונית עם הפרמטר 2, מספר האנשים הפונים לאשנב 2 במשך דקה הוא משתנה מקרי המתפלג פואסונית עם הפרמטר 3, ומספר האנשים הפונים לאשנב 3 במשך דקה הוא משתנה מקרי המתפלג פואסונית עם הפרמטר 4.
אין תלות בין מספרי האנשים הנכנסים לסניף בדקות שונות,
ואין תלות בין מספרי האנשים שפונים לאשנבים השונים.
כל אדם שנכנס לסניף הדואר פונה בהכרח לאחד מן האשנבים.

א. מהי ההסתברות שבין 8:00 ל-8:01 ייכנסו תשעה אנשים לסניף הדואר?

ב. אם ידוע שבין 8:00 ל-8:01 נכנסו תשעה אנשים לסניף הדואר, מהי ההסתברות ששלושה מהם פנו לאשנב 1?

ג. אם ידוע שבין 8:00 ל-8:01 נכנסו לסניף הדואר שלושה אנשים שפנו לאשנב 1, מהי ההסתברות שבסך הכול נכנסו לסניף הדואר באותה הדקה תשעה אנשים?

5) הוכיחו את הטענה שאם X ו- Y הם משתנים מקריים בלתי-תלויים המתפלגים פואסונית עם הפרמטרים λ_1 ו- λ_2 בהתאמה, אז ההתפלגות של המשתנה המקרי X המותנה, בהינתן $X+Y=n$, היא בינומית עם הפרמטרים n ו- $\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$.

6) $X_1, X_2, \dots, X_{100}$ הם משתנים מקריים בלתי-תלויים.
נניח כי לכל: $i=1,\dots,100$ ההתפלגות של המשתנה המקרי X_i היא פואסונית עם הפרמטר $\frac{i}{50}$.

א. מצאו את ההתפלגות המותנית של $\sum_{i=1}^{100} X_i$ בתנאי ש: $X_{100} = n$.

ב. מצאו את ההתפלגות המותנית של X_{100} בתנאי ש: $\sum_{i=1}^{100} X_i = n$.

תשובות סופיות:

1) א. 0.0946. ב. 148.4. ג. 2.4.

2) א. 0.938. ב. 0.1209. ג. 0.3772.

3) א. 0.9502. ב. $\frac{80}{243}$. ג. $13\frac{1}{3}$.

4) א. 0.1318. ב. 0.2041. ג. 0.149.

5) שאלה הוכחה.

6) א. $k \geq n$ $\frac{e^{-99} \cdot 99^{k-n}}{(k-n)!}$. ב. $B\left(n, \frac{2}{101}\right)$.

התפלגות מותנית בסכום של משתנים המתפלגים בינומית:

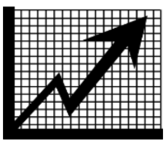
רקע:

אם X ו- Y הם משתנים מקריים בלתי-תלויים שמתפלגים בינומית עם הפרמטרים: (n_X, p) ו- (n_Y, p) בהתאמה, אז בהינתן ש- $X+Y=n$, המשתנה המקרי המותנה X יתפלג היפרגיאומטרית עם הפרמטרים: $N=n_X+n_Y$, $D=n_X$ ו- $n=n$.

כלומר: $X \sim B(n_x, p)$ ו- $Y \sim B(n_Y, p)$ והמשתנים בלתי תלויים זה בזה $\Leftarrow$ $X | X+Y=n \sim HG(n_X+n_Y, n_X, n)$.

דוגמה:

אנליסט בנה תיק השקעות משמונה מניות, שכל אחת מהן תעלה השנה בהסתברות של 0.8, באופן בלתי תלוי במניות אחרות. הוא החליט להוסיף לתיק עוד ארבע מניות, שכל אחת מהן תעלה השנה בהסתברות של 0.8 באופן בלתי תלוי במניות אחרות, בכלל זה אלה שכבר נמצאות בתיק ההשקעות.



אם עשר מניות מהתיק יעלו השנה, מה הסיכוי ששלוש מהן יהיו מארבע המניות שנוספו לתיק?

תשובה:

$Y \sim B(n_Y=8, P=0.8)$ - מספר המניות המקוריות שיעלו השנה.

$X \sim B(n_X=4, P=0.8)$ - מספר המניות שנוספו שיעלו השנה.

$$X \sim HG(N, D, n)$$

$$X | X+Y=10 \sim HG(12, 4, 10)$$

$$P(X=k)=\frac{\binom{D}{k}\binom{N-D}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

$$P(X=3 | X+Y=10)=\frac{\binom{4}{3}\binom{8}{7}}{\binom{12}{10}}=0.4848$$

שאלות:

1) חמישה אבירים וארבעה נסיכים מתאמנים בקליעה למטרה. כל אחד מתשעת המתאמנים מנסה לקלוע חץ אחד למטרה. הסיכוי של כל אחד מהאבירים לקלוע למטרה הוא 0.7, והסיכוי של כל אחד מהנסיכים לקלוע למטרה הוא 0.8. ניסיונות הקליעה למטרה בלתי-תלויים זה בזה.

א. מה ההסתברות שארבעה אבירים ושלושה נסיכים יקלעו למטרה?

ב. אם ארבעה אבירים קלעו למטרה, מה הסיכוי ששלושה נסיכים יקלעו למטרה?

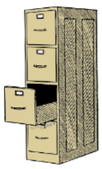
ג. אם שמונה מתאמנים קלעו למטרה, מה התוחלת של מספר הנסיכים שקלעו למטרה?

2) מזכיר הכניס ארבע תיקיות לתוך מגירות בארונית. בארונית חמש מגירות. בחירת המגירה לכל תיקייה נעשית באקראי ובאופן בלתי תלוי בתיקיות אחרות. מגירה יכולה להכיל מספר רב של תיקיות.

נגדיר:

X – מספר התיקיות שהוכנסו למגירה העליונה.

Y – מספר התיקיות שהוכנסו למגירה התחתונה.



א. מה ההתפלגות של Y ומה ההתפלגות של X?

ב. מצאו את ההתפלגות של Y בהינתן שלמגירה העליונה והתחתונה יחד הוכנסו בדיוק שלוש תיקיות.

3) מטילים מטבע תקין 50 פעמים. אם X הוא מספר הפעמים שהתקבל "עץ" בכל 50 ההטלות, ו-Y הוא מספר הפעמים שהתקבל "עץ" ב-20 ההטלות הראשונות.

א. מצאו את פונקציית ההסתברות המשותפת של X ו- Y.

ב. מצאו את פונקציית ההסתברות המותנית של X בהינתן ש: $Y=j$, לכל: $j=0, 1, \dots, 20$. מה הקשר בין פונקציית ההסתברות שהתקבלה ובין ההתפלגות הבינומית?

ג. מצאו את פונקציית ההסתברות המותנית של Y בהינתן ש: $X=i$, לכל: $i=0, 1, \dots, 50$. זהו את ההתפלגות המותנית שהתקבלה.

4) הוכיחו את הטענה הבאה:

אם: $X \sim B(n_x, p)$ ו- $Y \sim B(n_Y, p)$, והמשתנים בלתי תלויים זה בזה,

אז: $X \mid X+Y=n \sim HG(n_X+n_Y, n_X, n)$.

תשובות סופיות:

1) א. 0.1475. ב. 0.4096.

ג. תוחלת: 3.6818.

2) א. $Y \sim B\left(n_Y = 4, P_Y = \frac{1}{3}\right)$, $X \sim B\left(n_X = 4, P_X = \frac{1}{5}\right)$ ב. עין בסרטון הוידאו.

3) א. $j \le i \le j+30$, $0 \le j \le 2$, $P(X=i, Y=j) = \binom{20}{j} \cdot \binom{30}{i-j} \cdot 0.5^{50}$.

ב. $0 \le i-j \le 30$, $P(X=i | Y=j) = \binom{30}{i-j} \cdot 0.5^{30}$.

ג. $Y | Y+W=i \sim HG(50, 20, i)$.

4) שאלת הוכחה.

הקשר בין התפלגות פואסונית להתפלגות מעריכית:

רקע:

אם מספר המופעים ביחידת זמן כלשהי מתפלג פואסונית בקצב λ, אז הזמן החולף מתחילת מרווח הזמן עד להתרחשות המופע הראשון הוא משתנה מקרי שמתפלג מעריכית עם הפרמטר λ לאותה יחידת זמן.

אפשר לומר גם ההפך: אם הזמן החולף מתחילת מרווח זמן מסוים עד למופע הראשון הוא משתנה מקרי שמתפלג מעריכית עם הפרמטר λ ליחידת זמן, אז מספר המופעים ביחידת הזמן מתפלג פואסונית בקצב λ.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

בשדה התעופה סכיפהול שבאמסטרדם הזמן החולף בין טיסה נכנסת אחת לזו שאחריה מתפלג מעריכית עם תוחלת של חצי דקה.

א. מה ההתפלגות של מספר הטיסות הנכנסות בדקה?

ב. מה ההתפלגות של מספר הטיסות הנכנסות בשעה?

ג. מה ההסתברות שבדקה כלשהי ייכנסו פחות משתי טיסות לשדה התעופה?

תשובות:

$$E(Y)=\frac{1}{2}=\frac{1}{\lambda}\Rightarrow \lambda=2$$

$Y\sim \exp(\lambda=2)$ הזמן בין טיסות נכנסות בדקות.

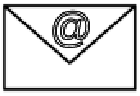
א. $X\sim P(\lambda=2)$ מספר הטיסות הנכנסות בדקה.

ב. $W\sim P(\lambda=2\cdot 60=120)$ מספר הטיסות הנכנסות בשעה.

ג. $$P(x<2)=P(x\le 1)=P(x=0)+P(x=1)=\frac{e^{-2}\cdot 2^0}{0!}+\frac{e^{-2}\cdot 2^1}{1!}$$
$$e^{-2}+2e^{-2}=3e^{-2}=\frac{3}{e^2}=0.406$$

שאלות:

1) מספר המיילים שגל מקבלת ביממה מתפלג פואסונית עם תוחלת של 10 מיילים.



א. מה ההסתברות שמחר גל תקבל בדיוק 12 מיילים?

ב. מה תוחלת הזמן שיעבור מהרגע שבו גל תפתח את המחשב ועד שתקבל את המייל הראשון?

2) מספר השיעולים בתיאטרון בזמן הצגה מתפלג פואסונית בקצב של שני שיעולים לדקה. משך ההצגה הוא שעתיים.

א. מה התוחלת של מספר הדקות בהצגה שבהן יש לפחות שיעול אחד?

ב. מה התוחלת של מספר השיעולים בהצגה?

ג. מה תוחלת הזמן בין שיעול לשיעול בהצגה?

3) הזמן בין תקלה אחת לבאה אחריה במערכת חשמלית מתפלג מעריכית עם תוחלת של 50 שעות.

א. מהו העשירון העליון של הזמן בין תקלה אחת לבאה אחריה במערכת?

ב. מה ההסתברות שביממה מסוימת יהיו שתי תקלות במערכת?

4) מספר הפניות למונית של דוד בשעות הערב הוא משתנה מקרי שמתפלג פואסונית. בממוצע דוד מקבל בשעות הערב פנייה אחת בשתי דקות. משמרת הערב שלו אורכת חמש שעות.

א. מה ההסתברות שבמשך ארבע דקות כלשהן במשמרת יקבל דוד לפחות שתי פניות?

ב. אם נכנסת למונית של דוד בשעות הערב, מה ההסתברות שמרגע כניסתך יעברו לפחות חמש דקות עד שתתקבל הפנייה הבאה למונית?

ג. דוד עובד שש משמרות בשבוע. מה ההסתברות שרק במשמרת אחת בשבוע הוא יקבל בדיוק 12 פניות בין 21:20 ל-21:30?

ד. נניח שחלפה דקה מאז הפנייה האחרונה למונית ועדיין לא הגיעה אף פנייה נוספת. מה ההסתברות שעד להגעת פנייה נוספת יחלפו עוד שתי דקות לפחות?

5) הוכיחו שאם מספר המופעים ליחידת זמן מתפלג פואסונית בקצב λ, אז הזמן החולף מזמן 0 עד למופע הראשון הוא משתנה מקרי שמתפלג מעריכית עם פרמטר λ.

תשובות סופיות:

1) א. 0.0948. ב. 0.1.
2) א. 103.7. ב. 240. ג. 0.5.
3) 115.13. ב. 0.0713.
4) א. 0.59399. ב. 0.0821. ג. 0.0200. ד. 0.3679.
5) שאלת הוכחה.