הסתברות וסטטיסטיקה

פרק 31 - קשרים בין התפלגויות מיוחדות

תוכן העניינים

התפלגות סכום התפלגויות פואסוניות בלתי תלויות:

רקע:

קיימות n התפלגויות פואסוניות בלתי תלויות זו בזו: $i=1,2,\ldots,n$, $X_i \sim P(\lambda_i)$.

ניצור משתנה מקרי חדש שהוא סכום של n ההתפלגויות הללו: $\sum_{i=1}^{n} X_i$.

משתנה חדש זה מתפלג גם הוא פואסונית עם פרמטר: $\lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$.

לסיכום, אם: $i=1,2,\ldots,n$, $X_i \sim P(\lambda_i)$ והמשתנים בלתי תלויים זה בזה,
אז מתקיים: $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim P\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)$.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

מפעל ממתקים מייצר סוכריות ג'לי בזרם פואסוני. הסוכריות נוצרות בצבעים כתום, ירוק, אדום וסגול. להלן טבלה אשר מציגה את תוחלת מספר הסוכריות שנוצרות בכל אחד מהצבעים בשניית ייצור במפעל. מספר הסוכריות שנוצרות בשנייה כלשהי בכל אחד מהצבעים בלתי תלוי במספר הסוכריות בצבעים האחרים.

צבע	תוחלת
כתום	4
ירוק	3
אדום	3
סגול	2

א. מה ההסתברות שבשנייה כלשהי ייוצרו בדיוק 14 סוכריות ג'לי במפעל?

ב. מה ההתפלגות של מספר סוכריות הג'לי שמיוצרות בדקה כלשהי במפעל?

ג. מה ההסתברות שבשנייה כלשהי המפעל ייצר 3 סוכריות כתומות ו-8 סוכריות בצבעים אחרים?

תשובה:

א. $P(T=14)=e^{-12}\cdot\frac{12^{14}}{14!}=0.0905$.

ב. $T_j\sim P(12)$ מספר סוכריות שמיוצרות בשנייה j , $\sum_{j=1}^{60}T_j\sim P(12\cdot 60=720)$.

ג. $P(X_1=4\cap T=8)-P\left(X_1=4\cap\sum_{i=2}^{4}X_i=4\right)=P(X_1=4)\cdot P\left(\sum_{i=2}^{4}X_i=4\right)=\frac{e^{-4}\cdot 4^4}{4!}\cdot\frac{e^{-8}\cdot 8^4}{4!}=0.0112$.

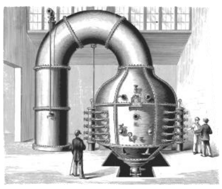
שאלות:

1) איזבלה היא רשת של חנויות בגדים. לרשת שלוש חנויות שהרכישות בהן נעשות בזרם פואסוני. בחנות A קצב הרכישות הוא 1 ל-10 דקות, בחנות B קצב הרכישות הוא 1 לשעה, ובחנות C קצב הרכישות הוא 2 לרבע שעה. אין תלות בין מספרי הרכישות בחנויות הרשת השונות.

א. מהי התוחלת ומהי סטיית התקן של מספר הרכישות בכלל חנויות הרשת בשעה?

ב. מה ההסתברות שבשעה כלשהי מספר הרכישות בחנויות הרשת יהיה לכל היותר 5?

2) במפעל פועלות שתי מכונות. מספר התקלות במכונה א׳ מתפלג פואסונית עם תוחלת של 2 תקלות ליום, ומספר התקלות במכונה ב׳ מתפלג פואסונית עם תוחלת של תקלה אחת ביום.
מספרי התקלות במכונות השונות בלתי תלויים זה בזה.



א. מה ההתפלגות של מספר התקלות במפעל ביום?

ב. מה ההסתברות שביומיים מסוימים כלל לא יהיו תקלות במפעל?

ג. מה ההסתברות שביומיים מסוימים יהיו במפעל בדיוק 5 תקלות, שמהן בדיוק 3 תקלות במכונה א׳?

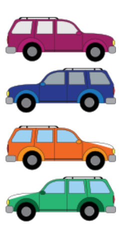
3) נתון ש- $i=1,2,3$, $X_i \sim P(1)$ והמשתנים בלתי תלויים זה בזה.

נגדיר את Y באופן הבא: $Y=\sum_{i=1}^{3} X_i$.

א. מהי התוחלת ומהי השונות של Y?

ב. חשבו את: $E|Y-2|$.

4) לצומת נכנסות מכוניות מ-3 כיוונים שונים. מספר המכוניות הנכנסות מכיוון i הוא משתנה מקרי שמתפלג פואסונית עם פרמטר i מכוניות לשעה כש- $i=1,2,3$. אין תלות בין מספרי המכוניות המגיעות לצומת מכיוונים שונים. W הוא משתנה מקרי שמייצג את מספר המכוניות המגיעות לצומת בשעה משלושת הכיוונים יחד.



א. חשבו את: $P(W=k|W>0)$, $k=1,2,3,...$.

ב. חשבו את: $E\left(\frac{1}{1+W}\right)$.

5) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו שאם: $X_1 \sim P(\lambda_1)$ ו- $X_2 \sim P(\lambda_2)$ והמשתנים בלתי תלויים זה בזה, אז מתקיים: $X_1 + X_2 \sim P(\lambda_1 + \lambda_2)$.

ב. הוכיחו שאם: $i = 1, 2, \ldots, n$, $X_i \sim P(\lambda_i)$ והמשתנים בלתי תלויים זה בזה, אז מתקיים: $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim P\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)$.

תשובות סופיות:

1) א. תוחלת: 15, סטיית תקן: $\sqrt{15}$. ב. 0.0028.

2) א. פואסונית עם פרמטר 3. ב. 0.0025. ג. 0.0529.

3) א. תוחלת: 3, שונות: 3. ב. $\frac{10}{e^3} + 1$.

4) א. $\frac{e^{-6} \cdot 6^k}{k! \cdot (1 - e^{-6})}$. ב. $\frac{e^{-6} \cdot (e^6 - 1)}{6}$.

5) שאלת הוכחה.

התפלגות סכום התפלגויות בינומיות בלתי תלויות:

רקע:

אם יש כמה משתנים מקריים בלתי תלויים זה בזה שלכל אחד מהם התפלגות בינומית עם אותו פרמטר p , סכום המשתנים יתפלג בינומית עם פרמטר p.
באופן יותר מפורט:

אם X_i הוא משתנה מקרי שמתפלג בינומית עם הפרמטרים (n_i, p) לכל: $i=1,2,\ldots,m$,
והמשתנים בלתי-תלויים זה בזה, אז $\sum_{i=1}^{m} X_i$ הוא משתנה מקרי בינומי עם
הפרמטרים: $\left(\sum_{i=1}^{m} n_i, p\right)$.

דוגמה:

ערן מטיל קובייה ארבע פעמים, ודינה מטילה קובייה פעמיים.
מהי התפלגות מספר הפעמים שבהן ערן ודינה קיבלו תוצאה קטנה מ-3?
מהי תוחלת מספר הפעמים שבהן ערן ודינה קיבלו תוצאה קטנה מ-3?

תשובה:
ב״ת

$X_1 \sim B\left(n_1 = 4, P = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}\right)$ - מספר הפעמים שערן קיבלת פחות מ-3.

$X_2 \sim B\left(n_2 = 2, P = \frac{1}{3}\right)$ - מספר הפעמים שדינה קיבלת פחות מ-3.

$$X_1 + X_2 \sim B\left(n = 4+2 = 6, P = \frac{1}{3}\right)$$

$$X \sim B(n,p) \Rightarrow E(x) = n \cdot P$$

$$E(X_1 + X_2) = 6 \cdot \frac{1}{3} = 2$$

שאלות:

1) יוסי מטיל מטבע ארבע פעמים, ודנה מטילה מטבע שש פעמים.
אם X הוא סך הפעמים שיוסי ודנה יקבלו עץ.

א. מה ההתפלגות של X?
ב. מה התוחלת ומה השונות של X?

2) במבחן שני חלקים. חלק א' כולל 10 שאלות עם 4 תשובות אפשריות שרק אחת מהן נכונה. חלק ב' כולל 10 שאלות מסוג נכון או לא נכון.
סטודנט ניגש לבחינה ומנחש את כל התשובות בבחינה.

א. מה ההסתברות שהסטודנט יענה נכון לכל היותר על 3 שאלות?
ב. מה התוחלת ומה השונות של מספר התשובות הנכונות בבחינה של הסטודנט?

3) רונן הזמין למסיבת יום ההולדת שלו 18 אורחים – 10 גברים ו-8 נשים.
כל גבר יגיע למסיבה בהסתברות 0.7, וכל אישה תגיע למסיבה בהסתברות 0.9.
ידוע שאין תלות בין הגעת גבר אחד להגעתו של גבר אחר, בין הגעת אישה אחת להגעתה של אחרת ובין הגעת גבר להגעתה של אישה.

א. מה ההסתברות שיגיעו למסיבה בדיוק 9 גברים ו-8 נשים?
ב. מה הסיכוי שיגיעו למסיבה לפחות 17 אורחים?

4) נתון ש: $Y \sim B(3,0.6)$, $X \sim B(2,0.5)$. ידוע ש- X ו- Y בלתי תלויים זה בזה.
א. מצאו את ההתפלגות של $X+Y$.
ב. מצאו את: $P(X+Y=2 \mid X>0)$.

5) נתון ש- X ו- Y הם משתנים מקריים בלתי-תלויים. X מתפלג בינומית עם הפרמטרים n, p ו- Y מתפלג בינומית עם הפרמטרים m ו- p.
האם גם המשתנים המקריים X ו- $W=X+Y$ בלתי-תלויים זה בזה?

6) X ו- Y הם משתנים מקריים בלתי-תלויים. X מתפלג בינומית עם הפרמטרים n_X, p ו- Y מתפלג בינומית עם הפרמטרים n_Y ו- p.
הוכיחו ש- $X+Y$ מתפלג בינומית עם הפרמטרים: n_x+n_Y ו- p.

תשובות סופיות:

1) א. $X \sim B(10,0.5)$. ב. $E(X)=5$, $V(X)=2.5$.

2) א. 0.0178. ב. תוחלת: 7.5, שונות: 4.375.

3) א. 0.0521. ב. 0.0751.

4) א. עיין בסרטון הוידאו. ב. 0.2133.

5) המשתנים תלויים.

6) שאלת הוכחה.

התפלגות סכום התפלגויות גיאומטריות בלתי תלויות:

רקע:

אם יש כמה משתנים מקריים בלתי תלויים זה בזה שלכל אחד מהם התפלגות גיאומטרית עם אותו פרמטר p, סכום המשתנים יתפלג בינומית שלילית עם פרמטר p. באופן יותר מפורט:

אם X_i הוא משתנה מקרי שמתפלג גיאומטרית עם הפרמטר p לכל: $i=1,2,...,m$,

ואם ידוע שהמשתנים בלתי-תלויים זה בזה, אז $\sum_{i=1}^{m} X_i$ הוא משתנה מקרי שמתפלג

בינומית שלילית עם הפרמטרים (m,p).

דוגמה:

עודד משחק בשני שלבים:
בשלב הראשון הוא מטיל קובייה עד אשר הוא מקבל את התוצאה 1.
ברגע שהוא מקבל את התוצאה 1 הוא עובר לשלב השני,
ובו הוא שוב מטיל את הקובייה עד שהוא מקבל את התוצאה 4.

א. מהי ההתפלגות של מספר ההטלות בשלב הראשון?

ב. מהי ההתפלגות ש מספר ההטלות בשלב השני?

ג. מהי ההתפלגות של מספר ההטלות במשחק?

תשובות (פתרון בהקלטה):

א. $X_1 =$ מספר ההטלות בשלב הראשון, $X_1 \sim G\left(\frac{1}{6}\right)$.

ב. $X_2 =$ מספר ההטלות בשלב השני, $X_2 \sim G\left(\frac{1}{6}\right)$.

ג. $X_1 + X_2 \sim NB\left(2, \frac{1}{6}\right)$.

שאלות:

1) יוסי מטיל מטבע עד לקבלת "עץ", ודנה מטילה מטבע (באופן לא תלוי ביוסי) עד לקבלת "פָּלִי". X הוא מספר ההטלות של יוסי ודנה יחד.

א. מה ההתפלגות של X?

ב. מה התוחלת ומה השונות של X?

2) אדם מנסה להתקשר למוקד שירות. הוא מתקשר עד אשר יקבל מענה. ההסתברות למענה במוקד השירות היא 0.4 בכל פעם, ללא תלות בניסיונות האחרים. אחרי שסיים את השיחה שבה קיבל מענה, האדם נזכר ששכח לשאול שאלה נוספת. הוא מתקשר שוב למוקד השירות עד לקבלת מענה.

א. מה ההסתברות שבסך הכול האדם התקשר למוקד השירות שש פעמים?

ב. מה ההסתברות שבסך הכול האדם התקשר למוקד השירות שבע פעמים, אם ידוע שבפעם הראשונה הוא נאלץ להתקשר שלוש פעמים עד לקבלת מענה?

3) X_i הוא משתנה מקרי גיאומטרי עם הפרמטר 0.2 לכל: $i=1,2,...,5$, וכמו כן נתון ש- $X_1, X_2, ..., X_5$. בלתי-תלויים זה בזה.

א. מה ההסתברות ש: $\sum_{i=1}^{5} X_i = 5$?

ב. חשבו את: $P\left(\sum_{i=1}^{5} X_i = 12 \mid X_1 = 2\right)$.

4) נתון ש: $Y \sim G(0.5)$, $X \sim G(0.6)$. X ו- Y בלתי-תלויים זה בזה.

א. מצאו את ההתפלגות של $X+Y$.

ב. מצאו את: $P(X+Y=2 \mid X>0)$.

5) X ו- Y הם משתנים מקריים בלתי-תלויים.
X מתפלג גיאומטרית עם הפרמטר p ו- Y מתפלג גיאומטרית עם הפרמטר p. הוכיחו ש- $X+Y$ מתפלג בינומית שלילית עם הפרמטרים 2 ו- p.

6) הוכיחו את הטענה: אם X_i הוא משתנה מקרי שמתפלג גיאומטרית עם הפרמטר p לכל: $i=1,2,...,m$ ואם: $X_1, X_2, ..., X_m$. בלתי-תלויים זה בזה, אז $\sum_{i=1}^{m} X_i$ הוא משתנה מקרי שמתפלג בינומית שלילית עם הפרמטרים (m,p).

תשובות סופיות:

(1 א. $X \sim NB\left(2,\frac{1}{2}\right)$. ב. תוחלת: 4, שונות: 4.

(2 א. 0.10368. ב. 0.0864.

(3 א. 0.00032. ב. 0.0352.

(4 א. $k=2,3,\dots$, $P\left(X+Y=k\right)=6\cdot 4^k\left(1.25^k-1.25\right)$. ב. 0.3.

(5 שאלה הוכחה.

(6 שאלת הוכחה.

הקשר בין התפלגות פואסונית להתפלגות מעריכית:

רקע:

אם מספר המופעים ביחידת זמן כלשהי מתפלג פואסונית בקצב λ, אז הזמן החולף מתחילת מרווח הזמן עד להתרחשות המופע הראשון הוא משתנה מקרי שמתפלג מעריכית עם הפרמטר λ לאותה יחידת זמן.

אפשר לומר גם ההפך: אם הזמן החולף מתחילת מרווח זמן מסוים עד למופע הראשון הוא משתנה מקרי שמתפלג מעריכית עם הפרמטר λ ליחידת זמן, אז מספר המופעים ביחידת הזמן מתפלג פואסונית בקצב λ.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

בשדה התעופה סכיפהול שבאמסטרדם הזמן החולף בין טיסה נכנסת אחת לזו שאחריה מתפלג מעריכית עם תוחלת של חצי דקה.

א. מה ההתפלגות של מספר הטיסות הנכנסות בדקה?

ב. מה ההתפלגות של מספר הטיסות הנכנסות בשעה?

ג. מה ההסתברות שבדקה כלשהי ייכנסו פחות משתי טיסות לשדה התעופה?

תשובות:

$$E(Y)=\frac{1}{2}=\frac{1}{\lambda}\Rightarrow\lambda=2$$

$Y\sim\exp(\lambda=2)$ הזמן בין טיסות נכנסות בדקות.

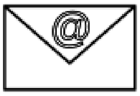
א. $X\sim P(\lambda=2)$ מספר הטיסות הנכנסות בדקה.

ב. $W\sim P(\lambda=2\cdot60=120)$ מספר הטיסות הנכנסות בשעה.

ג.
$$P(x<2)=P(x\le1)=P(x=0)+P(x=1)=\frac{e^{-2}\cdot2^0}{0!}+\frac{e^{-2}\cdot2^1}{1!}$$
$$e^{-2}+2e^{-2}=3e^{-2}=\frac{3}{e^2}=0.406$$

שאלות:

1) מספר המיילים שגל מקבלת ביממה מתפלג פואסונית עם תוחלת של 10 מיילים.



א. מה ההסתברות שמחר גל תקבל בדיוק 12 מיילים?

ב. מה תוחלת הזמן שיעבור מהרגע שבו גל תפתח את המחשב ועד שתקבל את המייל הראשון?

2) מספר השיעולים בתיאטרון בזמן הצגה מתפלג פואסונית בקצב של שני שיעולים לדקה. משך ההצגה הוא שעתיים.

א. מה התוחלת של מספר הדקות בהצגה שבהן יש לפחות שיעול אחד?

ב. מה התוחלת של מספר השיעולים בהצגה?

ג. מה תוחלת הזמן בין שיעול לשיעול בהצגה?

3) הזמן בין תקלה אחת לבאה אחריה במערכת חשמלית מתפלג מעריכית עם תוחלת של 50 שעות.

א. מהו העשירון העליון של הזמן בין תקלה אחת לבאה אחריה במערכת?

ב. מה ההסתברות שביממה מסוימת יהיו שתי תקלות במערכת?

4) מספר הפניות למונית של דוד בשעות הערב הוא משתנה מקרי שמתפלג פואסונית. בממוצע דוד מקבל בשעות הערב פנייה אחת בשתי דקות. משמרת הערב שלו אורכת חמש שעות.

א. מה ההסתברות שבמשך ארבע דקות כלשהן במשמרת יקבל דוד לפחות שתי פניות?

ב. אם נכנסת למונית של דוד בשעות הערב, מה ההסתברות שמרגע כניסתך יעברו לפחות חמש דקות עד שתתקבל הפנייה הבאה למונית?

ג. דוד עובד שש משמרות בשבוע. מה ההסתברות שרק במשמרת אחת בשבוע הוא יקבל בדיוק 12 פניות בין 21:20 ל-21:30?

ד. נניח שחלפה דקה מאז הפנייה האחרונה למונית ועדיין לא הגיעה אף פנייה נוספת. מה ההסתברות שעד להגעת פנייה נוספת יחלפו עוד שתי דקות לפחות?

5) הוכיחו שאם מספר המופעים ליחידת זמן מתפלג פואסונית בקצב λ, אז הזמן החולף מזמן 0 עד למופע הראשון הוא משתנה מקרי שמתפלג מעריכית עם פרמטר λ.

תשובות סופיות:

1) א. 0.0948. ב. 0.1.

2) א. 103.7. ב. 240. ג. 0.5.

3) 115.13. ב. 0.0713.

4) א. 0.59399. ב. 0.0821. ג. 0.0200. ד. 0.3679.

5) שאלת הוכחה.