

# מתמטיקה לכלכלנים ב

פרק 15 - קיצון של פונקציה של שני משתנים תחת אילוץ (כופלי לגראנז)

תוכן העניינים

1. קיצון של פונקציה של שני משתנים תחת אילוץ (כופלי לגראנז).....1

## קיצון של פונקציה של שני משתנים תחת אילוץ (כופלי לגראנז')

### שאלות

מצאו את המקסימום והמינימום של הפונקציות בשאלות 1-4, בכפוף לאילוץ הנתון:

$$(1) \quad f(x, y) = x^2 + y^2; \quad 2x^2 + 3xy = 1 - 2y^2$$

$$(2) \quad f(x, y) = x^2 - y^2; \quad x^2 + y^2 = 1$$

$$(3) \quad f(x, y) = 4x + 6y; \quad x^2 + y^2 = 13$$

$$(4) \quad f(x, y) = x^2 y; \quad x^2 + 2y^2 = 6$$

$$(5) \quad \max \{xy\} \quad \text{s.t.} \quad x + 3y = 12$$

א. פתרו את הבעיה.

ב. הביאו פתרון גרפי לבעיה.

$$(6) \quad \max \{2x + y\} \quad \text{s.t.} \quad \sqrt{x} + \sqrt{y} = 9, \quad x, y \geq 0$$

א. פתרו את הבעיה.

ב. הביאו פתרון גרפי לבעיה.

$$(7) \quad \text{מבין כל הנקודות הנמצאות על הישר } x + 3y = 12,$$

מצאו את זו שמכפלת שיעוריה מקסימלי.

$$(8) \quad \text{מבין כל הנקודות שעל העקומה } 2x^2 + 3xy = 1 - 2y^2, \text{ מצאו את הנקודות}$$

שמרחקיהן מראשית הצירים הוא מינימלי, ואת הנקודות שמרחקן

מראשית הצירים הוא מקסימלי.

$$(9) \quad \text{מוישליה קונה בשוק } x \text{ ק"ג מלפפונים ו- } y \text{ ק"ג עגבניות.}$$

התועלת מצריכת הסל,  $(x, y)$ , נתונה על ידי  $u(x, y) = \ln x + \ln y$ .

מחיר ק"ג מלפפונים הוא 1 ש"ח, ומחיר ק"ג עגבניות 2 ש"ח.

מוישליה קובע לעצמו להשיג רמת תועלת  $\ln 16$ ,

והוא מעוניין להשיג זאת בעלות מינימאלית.

נסחו ופתרו את בעיית מוישליה.

- 10** דני קונה בשוק  $x$  ק"ג מלפפונים ו- $y$  ק"ג עגבניות.  
 התועלת מצריכת הסל  $(x, y)$  נתונה על ידי  $u(x, y) = xy$ .  
 מחיר ק"ג מלפפונים הוא 1 ש"ח, ומחיר ק"ג עגבניות 3 ש"ח.  
 לדני תקציב של 12 ש"ח.  
 נסחו ופתרו את בעיית דני.
- 11** עקומת התמורה בין מנגו,  $(x)$ , ואננס,  $(y)$ , היא  $x^2 + y^2 = 13$ .  
 לדני תועלת  $f(x, y) = 4x + 6y$ .  
 דני מחפש את הסל (אננס, מנגו)  $(x, y)$  על עקומת התמורה,  
 המביא למקסימום את התועלת שלו מצריכת מנגו ואננס.  
 נסחו ופתרו את הבעיה.
- 12** ליצרון פונקציית ייצור  $Q = \sqrt{k} + \sqrt{L}$ .  
 המחירים ליחידת  $K$  ו- $L$  הם  $P_K = 2, P_L = 1$ .  
 היצרון נמצא ברמת תפוקה 100 והוא מחפש את הצירוף  $(K^*, L^*)$ ,  
 המביא למינימום את העלות.  
 נסחו את בעיית היצרון (אל תפתרו).

### תשובות סופיות

$$\max(\pm 1, \mp 1) \quad \min(\pm \sqrt{1/7}, \pm \sqrt{1/7}) \quad (1)$$

$$\max(0, \pm 1) \quad \min(\pm 1, 0) \quad (2)$$

$$\max(2, 3) \quad \min(-2, -3) \quad (3)$$

$$\max(\pm 2, 1) \quad \min(\pm 2, -1) \quad (4)$$

$$\max(6, 2) \quad (5)$$

$$\max(9, 36) \quad (6)$$

$$(6, 2) \quad (7)$$

$$\max(\pm 1, \mp 1) \quad \min(\pm \sqrt{1/7}, \pm \sqrt{1/7}) \quad (8)$$

$$\min(\sqrt{32}, \sqrt{8}) \quad (9)$$

$$\max(6, 2) \quad (10)$$

$$\max(2, 3) \quad (11)$$

$$\min\{2K + L\}; \quad \sqrt{K} + \sqrt{L} = 100 \quad (12)$$