

## מתמטיקה לפיזיקאים 2

פרק 5 - קיצון של פונקציה של שני משתנים תחת אילוץ (כופלי לגראנז')

תוכן העניינים

1. קיצון של פונקציה של שני משתנים תחת אילוץ.....1

## קיצון של פונקציה של שני משתנים תחת אילוץ (כופלי לגראנז')

### שאלות

בשאלות 1-4 מצאו את המקסימום והמינימום של הפונקציות, בכפוף לאילוץ הנתון:

$$f(x, y) = x^2 + y^2; \quad 2x^2 + 3xy = 1 - 2y^2 \quad (1)$$

$$f(x, y) = x^2 - y^2; \quad x^2 + y^2 = 1 \quad (2)$$

$$f(x, y) = 4x + 6y; \quad x^2 + y^2 = 13 \quad (3)$$

$$f(x, y) = x^2 y; \quad x^2 + 2y^2 = 6 \quad (4)$$

$$\text{נתונה בעיית הקיצון } \max\{xy\} \text{ s.t. } x + 3y = 12, \text{ כאשר } x, y > 0. \quad (5)$$

א. פתרו את הבעיה.

ב. הביאו פתרון גרפי לבעיה.

$$\text{נתונה בעיית הקיצון } \max\{2x + y\} \text{ s.t. } \sqrt{x} + \sqrt{y} = 9, \text{ כאשר } x, y \geq 0. \quad (6)$$

א. פתרו את הבעיה.

ב. הביאו פתרון גרפי לבעיה.

$$\text{מבין כל הנקודות הנמצאות על הישר } x + 3y = 12, \quad (7)$$

מצאו את זו שמכפלת שיעוריה מקסימלי.

$$\text{מבין כל הנקודות שעל העקומה } 2x^2 + 3xy = 1 - 2y^2, \text{ מצאו את הנקודות} \quad (8)$$

שמרחקן מראשית הצירים הוא מינימלי, ואת הנקודות שמרחקן מראשית הצירים הוא מקסימלי.

$$\text{מצאו את המרחק הקצר ביותר מהישר } 3x - 6y + 4 = 0 \quad (9)$$

$$\text{לפרבולה } x^2 + 2xy + y^2 + 4y = 0.$$

$$\text{רמז: מרחק הנקודה } (x_0, y_0) \text{ מהישר } ax + by + c = 0, \text{ הוא } \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

- 10** מוישליה קונה בשוק  $x$  ק"ג מלפפונים ו- $y$  ק"ג עגבניות. התועלת מצריכת הסל,  $(x, y)$ , נתונה על ידי  $u(x, y) = \ln x + \ln y$ . מחיר ק"ג מלפפונים 1 ש"ח, ומחיר ק"ג עגבניות 2 ש"ח. מוישליה קובע לעצמו להשיג רמת תועלת  $\ln 16$ , והוא מעוניין להשיג זאת בעלות מינימאלית. נסחו ופתרו את בעיית מוישליה.
- 11** דני קונה בשוק  $x$  ק"ג מלפפונים ו- $y$  ק"ג עגבניות. התועלת מצריכת הסל  $(x, y)$  נתונה על ידי  $u(x, y) = xy$ . מחיר ק"ג מלפפונים 1 ש"ח, ומחיר ק"ג עגבניות 3 ש"ח. לדני תקציב של 12 ש"ח. נסחו ופתרו את בעיית דני.
- 12** עקומת התמורה בין מנגו,  $(x)$ , ואננס,  $(y)$ , היא  $x^2 + y^2 = 13$ . לדני תועלת  $f(x, y) = 4x + 6y$ . דני מחפש את הסל (אננס, מנגו)  $(x, y)$  על עקומת התמורה, המביא למקסימום את התועלת שלו מצריכת מנגו ואננס. נסחו ופתרו את הבעיה.
- 13** ליצרן פונקציית ייצור  $Q = \sqrt{k} + \sqrt{L}$ . המחירים ליחידת  $K$  ו- $L$  הם  $P_K = 2, P_L = 1$ . היצרן נמצאו ברמת תפוקה 100 והוא מחפש את הצירוף  $(K^*, L^*)$ , המביא למינימום את העלות. נסחו את בעיית היצרן (לא לפתור).
- 14** נתונה בעיית קיצון תחת אילוץ  $\max\{u(x, y)\} \text{ s.t. } p_1x + p_2y = I$ . תהי  $(x^*, y^*)$  נקודת הפתרון של הבעיה. ניתן להניח מצב קלאסי של השקה. הוכיחו כי כופל לגראנז'  $\lambda$  מקיים  $\lambda = \frac{x \cdot u_x + y \cdot u_y}{I}$  בנקודת הפתרון של הבעיה.

**תשובות סופיות**

$$\max(\pm 1, \mp 1) \quad \min(\pm\sqrt{1/7}, \pm\sqrt{1/7}) \quad \text{(1)}$$

$$\min(0, \pm 1) \quad \max(\pm 1, 0) \quad \text{(2)}$$

$$\max(2, 3) \quad \min(-2, -3) \quad \text{(3)}$$

$$\max(\pm 2, 1) \quad \min(\pm 2, -1) \quad \text{(4)}$$

$$\max(6, 2) \quad \text{(5)}$$

$$\max(9, 36) \quad \text{(6)}$$

$$(6, 2) \quad \text{(7)}$$

$$\max(\pm 1, \mp 1) \quad \min(\pm\sqrt{1/7}, \pm\sqrt{1/7}) \quad \text{(8)}$$

$$7 / \sqrt{45} \quad \text{(9)}$$

$$\min(\sqrt{32}, \sqrt{8}) \quad \text{(10)}$$

$$\max(6, 2) \quad \text{(11)}$$

$$\max(2, 3) \quad \text{(12)}$$

$$\min\{2K + L\}; \quad \sqrt{K} + \sqrt{L} = 100 \quad \text{(13)}$$

$$\text{שאלת הוכחה.} \quad \text{(14)}$$