# מתמטיקה למנהל עסקים

## פרק 14 - קיצון של פונקציה של שני משתנים תחת אילוץ (כופלי לגראנז')

### תוכן העניינים

1. קיצון של פונקציה של שני משתנים תחת אילוץ (כופלי לגראנז'). . . . . 1

# קיצון של פונקציה של שני משתנים תחת אילוץ (כופלי לגראנז')

## שאלות

מצאו את המקסימום והמינימום של הפונקציות בשאלות **1-4**, בכפוף לאילוץ הנתון:

**1)** $f(x,y)=x^2+y^2; \qquad 2x^2+3xy=1-2y^2$

**2)** $f(x,y)=x^2-y^2; \qquad x^2+y^2=1$

**3)** $f(x,y)=4x+6y; \qquad x^2+y^2=13$

**4)** $f(x,y)=x^2y; \qquad x^2+2y^2=6$

**5)** נתונה בעיית הקיצון $\max\{xy\} \quad s.t. \quad x+3y=12$.

א. פתרו את הבעיה.

ב. הביאו פתרון גרפי לבעיה.

**6)** נתונה בעיית הקיצון $\max\{2x+y\} \quad s.t. \quad \sqrt{x}+\sqrt{y}=9$, כאשר $x,y\geq 0$.

א. פתרו את הבעיה.

ב. הביאו פתרון גרפי לבעיה.

**7)** מבין כל הנקודות הנמצאות על הישר $x+3y=12$,
מצאו את זו שמכפלת שיעוריה מקסימלי.

**8)** מבין כל הנקודות שעל העקומה $2x^2+3xy=1-2y^2$, מצאו את הנקודות שמרחקיהן מראשית הצירים הוא מינימלי, ואת הנקודות שמרחקן מראשית הצירים הוא מקסימלי.

**9)** מוישל'ה קונה בשוק $x$ ק"ג מלפפונים ו- $y$ ק"ג עגבניות.
התועלת מצריכת הסל, $(x,y)$, נתונה על ידי $u(x,y)=\ln x+\ln y$.
מחיר ק"ג מלפפונים הוא 1 ש"ח, ומחיר ק"ג עגבניות 2 ש"ח.
מוישל'ה קובע לעצמו להשיג רמת תועלת $\ln 16$,
והוא מעוניין להשיג זאת בעלות מינימאלית.
נסחו ופתרו את בעיית מוישל'ה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**10)** דני קונה בשוק $x$ ק"ג מלפפונים ו- $y$ ק"ג עגבניות.
התועלת מצריכת הסל $(x,y)$ נתונה על ידי $u(x,y)=xy$.
מחיר ק"ג מלפפונים הוא 1 ש"ח, ומחיר ק"ג עגבניות 3 ש"ח.
לדני תקציב של 12 ש"ח.
נסחו ופתרו את בעיית דני.

**11)** עקומת התמורה בין מנגו, $(x)$, ואננס, $(y)$, היא $x^2+y^2=13$.
לדני תועלת $f(x,y)=4x+6y$.
דני מחפש את הסל (אננס, מנגו) = $(x,y)$, על עקומת התמורה,
המביא למקסימום את התועלת שלו מצריכת מנגו ואננס.
נסחו ופתרו את הבעיה.

**12)** ליצרן פונקציית ייצור $Q=\sqrt{k}+\sqrt{L}$.
המחירים ליחידת $K$ ו- $L$ הם $P_K=2,\ P_L=1$.
היצרן נמצא ברמת תפוקה 100 והוא מחפש את הצירוף $\left(K^*,L^*\right)$,
המביא למינימום את העלות.
נסחו את בעיית היצרן (אל תפתרו).

## תשובות סופיות

**1)** $\min\left(\pm\sqrt{1/7},\pm\sqrt{1/7}\right)$ $\max\left(\pm1,\mp1\right)$

**2)** $\min\left(\pm1,0\right)$ $\max\left(0,\pm1\right)$

**3)** $\min\left(-2,-3\right)$ $\max\left(2,3\right)$

**4)** $\min\left(\pm2,-1\right)$ $\max\left(\pm2,1\right)$

**5)** $\max\left(6,2\right)$

**6)** $\max\left(9,36\right)$

**7)** $\left(6,2\right)$

**8)** $\min\left(\pm\sqrt{1/7},\pm\sqrt{1/7}\right)$ $\max\left(\pm1,\mp1\right)$

**9)** $\min\left(\sqrt{32},\sqrt{8}\right)$

**10)** $\max\left(6,2\right)$

**11)** $\max\left(2,3\right)$

**12)** $\min\left\{2K+L\right\};\ \sqrt{K}+\sqrt{L}=100$


כתב ופתר – גיא סלומון ©