

מתמטיקה למנהל עסקים 70001

פרק 13 - קיצון של פונקציה של שני משתנים תחת אילוץ (כופלי לגראנז')

תוכן העניינים

1. קיצון של פונקציה של שני משתנים תחת אילוץ.....1

קיצון של פונקציה של שני משתנים תחת אילוץ (כופלי לגראנז')

שאלות

בשאלות 1-4 מצאו את המקסימום והמינימום של הפונקציות, בכפוף לאילוץ הנתון:

$$(1) \quad f(x, y) = x^2 + y^2; \quad 2x^2 + 3xy = 1 - 2y^2$$

$$(2) \quad f(x, y) = x^2 - y^2; \quad x^2 + y^2 = 1$$

$$(3) \quad f(x, y) = 4x + 6y; \quad x^2 + y^2 = 13$$

$$(4) \quad f(x, y) = x^2 y; \quad x^2 + 2y^2 = 6$$

$$(5) \quad \text{נתונה בעיית הקיצון } \max\{xy\} \text{ s.t. } x + 3y = 12, \text{ כאשר } x, y > 0.$$

א. פתרו את הבעיה.

ב. הביאו פתרון גרפי לבעיה.

$$(6) \quad \text{נתונה בעיית הקיצון } \max\{2x + y\} \text{ s.t. } \sqrt{x} + \sqrt{y} = 9, \text{ כאשר } x, y \geq 0.$$

א. פתרו את הבעיה.

ב. הביאו פתרון גרפי לבעיה.

$$(7) \quad \text{מיושליה קונה בשוק } x \text{ ק"ג מלפפונים ו-} y \text{ ק"ג עגבניות.}$$

$$\text{התועלת מצריכת הסל, } (x, y), \text{ נתונה על ידי } u(x, y) = \ln x + \ln y.$$

מחיר ק"ג מלפפונים 1 ש"ח, ומחיר ק"ג עגבניות 2 ש"ח.

מיושליה קובע לעצמו להשיג רמת תועלת $\ln 16$,

והוא מעוניין להשיג זאת בעלות מינימאלית.

נסחו ופתרו את בעיית מיושליה.

$$(8) \quad \text{דני קונה בשוק } x \text{ ק"ג מלפפונים ו-} y \text{ ק"ג עגבניות.}$$

$$\text{התועלת מצריכת הסל } (x, y) \text{ נתונה על ידי } u(x, y) = xy.$$

מחיר ק"ג מלפפונים 1 ש"ח, ומחיר ק"ג עגבניות 3 ש"ח.

לדני תקציב של 12 ש"ח.

נסחו ופתרו את בעיית דני.

(9) עקומת התמורה בין מנגו, (x) , ואננס, (y) , היא $x^2 + y^2 = 13$.

לדני תועלת $f(x, y) = 4x + 6y$.

דני מחפש את הסל (אננס, מנגו) (x, y) , על עקומת התמורה,

המביא למקסימום את התועלת שלו מצריכת מנגו ואננס.

נסחו ופתרו את הבעיה.

(10) ליצרן פונקציית ייצור $Q = \sqrt{K} + \sqrt{L}$.

המחירים ליחידת K ו- L הם $P_K = 2$, $P_L = 1$.

היצרן נמצאו ברמת תפוקה 100 והוא מחפש את הצירוף (K^*, L^*) ,

המביא למינימום את העלות.

נסחו את בעיית היצרן (לא לפתור).

תשובות סופיות

$$\max(\pm 1, \mp 1) \quad \min(\pm \sqrt{1/7}, \pm \sqrt{1/7}) \quad (1)$$

$$\min(0, \pm 1) \quad \max(\pm 1, 0) \quad (2)$$

$$\max(2, 3) \quad \min(-2, -3) \quad (3)$$

$$\max(\pm 2, 1) \quad \min(\pm 2, -1) \quad (4)$$

$$\max(6, 2) \quad (5)$$

$$\max(9, 36) \quad (6)$$

$$\min(\sqrt{32}, \sqrt{8}) \quad (7)$$

$$\max(6, 2) \quad (8)$$

$$\max(2, 3) \quad (9)$$

$$\min\{2K + L\}; \quad \sqrt{K} + \sqrt{L} = 100 \quad (10)$$