חדוא לתלמידי כלכלה וניהול

פרק 30 - קיצון של פונקציה של שני משתנים תחת אילוץ (כופלי לגראנז')

תוכן העניינים

1. קיצון של פונקציה של שני משתנים תחת אילוץ (כופלי לגראנז'). 1

קיצון של פונקציה של שני משתנים תחת אילוץ (כופלי לגראנז')

שאלות

מצאו את המקסימום והמינימום של הפונקציות בשאלות **1-4**, בכפוף לאילוץ הנתון:

1) $f(x,y)=x^2+y^2; \qquad 2x^2+3xy=1-2y^2$

2) $f(x,y)=x^2-y^2; \qquad x^2+y^2=1$

3) $f(x,y)=4x+6y; \qquad x^2+y^2=13$

4) $f(x,y)=x^2y; \qquad x^2+2y^2=6$

5) נתונה בעיית הקיצון $\max\{xy\} \quad s.t. \quad x+3y=12$.

א. פתרו את הבעיה.

ב. הביאו פתרון גרפי לבעיה.

6) נתונה בעיית הקיצון $\max\{2x+y\} \quad s.t. \quad \sqrt{x}+\sqrt{y}=9$, כאשר $x,y\geq 0$.

א. פתרו את הבעיה.

ב. הביאו פתרון גרפי לבעיה.

7) מבין כל הנקודות הנמצאות על הישר $x+3y=12$,
מצאו את זו שמכפלת שיעוריה מקסימלי.

8) מבין כל הנקודות שעל העקומה $2x^2+3xy=1-2y^2$, מצאו את הנקודות שמרחקיהן מראשית הצירים הוא מינימלי, ואת הנקודות שמרחקן מראשית הצירים הוא מקסימלי.

9) מוישל'ה קונה בשוק x ק"ג מלפפונים ו- y ק"ג עגבניות.
התועלת מצריכת הסל, (x,y), נתונה על ידי $u(x,y)=\ln x+\ln y$.
מחיר ק"ג מלפפונים הוא 1 ש"ח, ומחיר ק"ג עגבניות 2 ש"ח.
מוישל'ה קובע לעצמו להשיג רמת תועלת $\ln 16$,
והוא מעוניין להשיג זאת בעלות מינימאלית.
נסחו ופתרו את בעיית מוישל'ה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

10) דני קונה בשוק x ק"ג מלפפונים ו- y ק"ג עגבניות.
התועלת מצריכת הסל (x,y) נתונה על ידי $u(x,y)=xy$.
מחיר ק"ג מלפפונים הוא 1 ש"ח, ומחיר ק"ג עגבניות 3 ש"ח.
לדני תקציב של 12 ש"ח.
נסחו ופתרו את בעיית דני.

11) עקומת התמורה בין מנגו, (x), ואננס, (y), היא $x^2+y^2=13$.
לדני תועלת $f(x,y)=4x+6y$.
דני מחפש את הסל (אננס, מנגו) = (x,y), על עקומת התמורה,
המביא למקסימום את התועלת שלו מצריכת מנגו ואננס.
נסחו ופתרו את הבעיה.

12) ליצרן פונקציית ייצור $Q=\sqrt{k}+\sqrt{L}$.
המחירים ליחידת K ו- L הם $P_K=2,\ P_L=1$.
היצרן נמצא ברמת תפוקה 100 והוא מחפש את הצירוף $\left(K^*,L^*\right)$,
המביא למינימום את העלות.
נסחו את בעיית היצרן (אל תפתרו).

תשובות סופיות

1) $\max(\pm 1, \mp 1) \quad \min\left(\pm\sqrt{1/7}, \pm\sqrt{1/7}\right)$

2) $\max(0, \pm 1) \quad \min(\pm 1, 0)$

3) $\max(2, 3) \quad \min(-2, -3)$

4) $\max(\pm 2, 1) \quad \min(\pm 2, -1)$

5) $\max(6, 2)$

6) $\max(9, 36)$

7) $(6, 2)$

8) $\max(\pm 1, \mp 1) \quad \min\left(\pm\sqrt{1/7}, \pm\sqrt{1/7}\right)$

9) $\min\left(\sqrt{32}, \sqrt{8}\right)$

10) $\max(6, 2)$

11) $\max(2, 3)$

12) $\min\{2K + L\}; \quad \sqrt{K} + \sqrt{L} = 100$

כתב ופתר – גיא סלומון ©