מבוא להסתברות

פרק 49 - קונבולוציה - התפלגות סכום משתנים בלתי תלויים

תוכן העניינים

קונבולוציה – התפלגות סכום משתנים בלתי תלויים:

רקע:

יהיו X ו- Y שני משתנים מקריים בלתי תלויים ונתעניין בהתפלגות סכומם:
$T = X + Y$ - שגם הוא משתנה מקרי.
אם מדובר במשתנים מקריים רציפים עם פונקציות צפיפות f_X ו- f_Y, פונקציית הצפיפות של $T = X + Y$, תינתן על ידי נוסחת הקונבולוציה הבאה:

$$f_{X+Y}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t-y) \cdot f_Y(y)\,dy.$$

דוגמה (פתרון בהקלטה):

נתון: $X \sim \exp(1)$ וכן: $Y \sim \exp(2)$. מצאו את פונקציית הצפיפות של: $T = X + Y$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) נתון ש- $Y,X\sim\exp(\lambda)$. כמו כן ידוע ש- X ו- Y בלתי תלויים.
מצאו את פונקציית הצפיפות של $X+Y$.

2) נתון ש- X ו- Y משתנים בלתי תלויים המתפלגים נורמלית סטנדרטית.
הוכיחו ש- $T=X+Y$ מתפלג נורמלית עם תוחלת 0 ושונות 2.

3) סוללה מסוג A בעלת אורך חיים המתפלג אחיד בין 1 ל-3 שעות.
כמו כן נתונה סוללה מסוג B בעלת אורח חיים המתפלג מעריכית עם תוחלת חיים של שעה. מכשיר מופעל על ידי סוללה A וברגע שהסוללה מתרוקנת אוטומטית מופעלת סוללה B. נסמן ב- Z את הזמן הכולל של פעילות המכשיר.
א. מצאו את פונקציית הצפיפות של Z.
ב. מה הסיכוי שהמכשיר יפעל פחות מ-4 שעות?

4) X ו- Y משתנים מקריים רציפים ובלתי תלויים בעלי פונקציות הצפיפות הבאות: $-2\le x\le 2 \quad f_X(x)=\frac{1}{4}$, $f_Y(y)=\begin{cases} y+1 & -1\le y\le 0 \\ 1-y & 0\le y\le 1 \\ 0 & else \end{cases}$.
מצאו את פונקציית הצפיפות של $X+Y$.

5) יהיו X ו- Y משתנים מקריים רציפים ובלתי תלויים בעלי התפלגות אחידה: $X\sim U(2,3)$ $Y\sim U(1,5)$.
א. מהי ההתפלגות של סכום המשתנים הללו?
ב. מה הרבעון העליון של סכום המשתנים?

6) יהיו X, Y ו- Z מתפלגים אחיד רציף באופן בלתי תלוי בין 0 ל- 1.
מצאו את פונקציית הצפיפות של: $X+Y+Z$.

7) הוכיחו את נוסחת הקונבולוציה עבור המקרה הרציף.
(רמז: היעזרו בפונקציית הצפיפות המשותפת ובהגדרה של משתנים מקריים רציפים בלתי תלויים).

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל www.gool.co.il

תשובות סופיות:

1) $f_T(t)=\lambda^2\cdot e^{-\lambda t}\cdot t \qquad t\ge 0$.

2) שאלת הוכחה.

3) א. $f_z(z)=\begin{cases}\frac{1}{2}\left(1-e^{1-z}\right) & 1\le z\le 3\\ \frac{1}{2}\left(e^{3-z}-e^{1-z}\right) & z>3\\ 0 & else\end{cases}$. ב. 0.841.

4) $f_T(t)=\begin{cases}\frac{1}{8}(t+3)^2 & -3\le t\le -2\\ \frac{1}{8}\left(2-(t+1)^2\right) & -2<t<-1\\ \frac{1}{4} & -1\le t\le 1\\ \frac{1}{8}\left(2-(t-1)^2\right) & 1<t<2\\ \frac{1}{8}(t-3)^2 & 2\le t\le 3\\ 0 & else\end{cases}$.

5) א. $f_T(t)=\begin{cases}\frac{t-3}{4} & 3\le t\le 4\\ \frac{1}{4} & 4<t>7\\ \frac{8-t}{4} & 7\le t\le 8\end{cases}$ ב. 4.5.

6) $f_W(w)=\begin{cases}\frac{w^2}{2} & 0\le w\le 1\\ -w^2+3w-1.5 & 1<w<2\\ \frac{(3-w)^2}{2} & 2\le w\le 3\end{cases}$.

7) שאלת הוכחה.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל