

הסתברות

פרק 51 - קונבולוציה - התפלגות סכום משתנים בלתי תלויים

תוכן העניינים

1. קונבולוציה - התפלגות סכום משתנים בלתי תלויים.....

קונבולוציה – התפלגות סכום משתנים בלתי תלויים:

רקע:

יהיו X ו- Y שני משתנים מקריים בלתי תלויים ונתעניין בהתפלגות סכומם :
 $T = X + Y$ - שגם הוא משתנה מקרי.
 אם מדובר במשתנים מקריים רציפים עם פונקציות צפיפות f_X ו- f_Y , פונקציית הצפיפות של $T = X + Y$, תינתן על ידי נוסחת הקונבולוציה הבאה :

$$f_{X+Y}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t-y) \cdot f_Y(y) dy$$

דוגמה (פתרון בהקלטה):

נתון : $T = X + Y$. מצאו את פונקציית הצפיפות של $X \sim \exp(1)$ וכן : $Y \sim \exp(2)$.

שאלות:

- 1) נתון $sh(\lambda) \sim \exp(-\lambda)$. כמו כן ידוע ש- X ו- Y בלתי תלויים.
מצאו את פונקציית הצפיפות של $X + Y$.
- 2) נתון $sh(X + Y)$ משתנים בלתי תלויים המתפלגים נורמלית סטנדרטית.
הוכיחו $sh(X + Y) = T = X + Y$ מתפלג נורמלית עם תוחלת 0 ושונות 2.
- 3) סוללה מסווג A בעלת אורך חיים המתפלג אחיד בין 1 ל-3 שעות.
כמו כן נתונה סוללה מסווג B בעלת אורך חיים המתפלג מעריכית עם תוחלת חיים של שעה. מכשיר מופעל על ידי סוללה A וברגע שהסוללה מתרוקנת אוטומטית מופעלת סוללה B. נסמן ב- Z את הזמן הכללי של פעילות המכשיר.
 - מצאו את פונקציית הצפיפות של Z .
 - מה הסיכוי שהמכשיר יפעל פחות מ-4 שעות?
- 4) X ו- Y משתנים מקריים רציפים ובלתי תלויים בעלי פונקציות הצפיפות

$$f_Y(y) = \begin{cases} y+1 & -1 \leq y \leq 0 \\ 1-y & 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}, f_X(x) = \frac{1}{4} \quad -2 \leq x \leq 2$$
 הראות: מצאו את פונקציית הצפיפות של $X + Y$.
- 5) יהיו X ו- Y משתנים מקריים רציפים ובלתי תלויים בעלי התפלגות אחידת: $X \sim U(2,3)$ ו- $Y \sim U(1,5)$.
 - מהי ההסתגלות של סכום המשתנים הללו?
 - מה הרבעון העליון של סכום המשתנים?
- 6) יהיו X , Y ו- Z מתפלגים אחיד רציף באופן בלתי תלוי בין 0 ל-1.
מצאו את פונקציית הצפיפות של: $X + Y + Z$.
- 7) הוכיחו את נוסחת הקונבולוציה עבור המקרה הרציף.
(רמז: היעזרו בפונקציית הצפיפות המשותפת ובהגדלה של משתנים מקריים רציפים ובלתי תלויים).

תשובות סופיות:

$$\cdot f_T(t) = \lambda^2 \cdot e^{-\lambda t} \cdot t \quad t \geq 0 \quad (1)$$

(2) שאלת הוכחה.

$$\text{.0.841 ב. } f_z(z) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1-e^{1-z}) & 1 \leq z \leq 3 \\ \frac{1}{2}(e^{3-z} - e^{1-z}) & z > 3 \\ 0 & \text{else} \end{cases} . \text{ נ. } (3)$$

$$\cdot f_T(t) = \begin{cases} \frac{1}{8}(t+3)^2 & -3 \leq t \leq -2 \\ \frac{1}{8}(2-(t+1)^2) & -2 < t < -1 \\ \frac{1}{4} & -1 \leq t \leq 1 \\ \frac{1}{8}(2-(t-1)^2) & 1 < t < 2 \\ \frac{1}{8}(t-3)^2 & 2 \leq t \leq 3 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad (4)$$

$$\text{.4.5 ב. } f_T(t) = \begin{cases} \frac{t-3}{4} & 3 \leq t \leq 4 \\ \frac{1}{4} & 4 < t > 7 \\ \frac{8-t}{4} & 7 \leq t \leq 8 \end{cases} . \text{ נ. } (5)$$

$$\cdot f_w(w) = \begin{cases} \frac{w^2}{2} & 0 \leq w \leq 1 \\ -w^2 + 3w - 1.5 & 1 < w < 2 \\ \frac{(3-w)^2}{2} & 2 \leq w \leq 3 \end{cases} \quad (6)$$

(7) שאלת הוכחה.