

# תורת ההסתברות

פרק 10 - קומבינטוריקה - שאלות מסכמות

תוכן העניינים

1. כללי ..... 1

## קומבינטוריקה – שאלות מסכמות:

### שאלות:

- (1) בכיתה 40 תלמידים. מעוניינים לבחור חמישה מהם לוועד כיתה. בכמה דרכים ניתן להרכיב את הוועד אם:
  - א. בוועד 5 תפקידים שונים ותלמיד יכול למלא יותר מתפקיד אחד.
  - ב. בוועד 5 תפקידים שונים ותלמיד לא יכול למלא יותר מתפקיד אחד.
  - ג. אין תפקידים שונים בוועד.
  
- (2) במשרד 30 עובדים, יש לבחור ארבעה עובדים למשלחת לחו"ל. בכמה דרכים ניתן להרכיב את המשלחת?
  - א. במשלחת ארבע משימות שונות שיש למלא וכל עובד יכול למלא יותר ממשימה אחת.
  - ב. כמו בסעיף א' רק הפעם עובד לא יכול למלא יותר ממשימה אחת.
  - ג. מעוניינים לבחור ארבעה עובדים שונים למשלחת שבה לכולם אותו התפקיד.
  
- (3) מעוניינים להרכיב קוד סודי. הקוד מורכב מ-2 ספרות שונות ו-3 אותיות שונות באנגלית (26 אותיות אפשריות).
  - א. כמה קודים שונים ניתן להרכיב?
  - ב. כמה קודים שונים ניתן להרכיב אם הקוד מתחיל בספרה ונגמר בספרה?
  - ג. כמה קודים ניתן להרכיב אם הספרות חייבות להיות צמודות זו לזו?
  - ד. בכמה קודים הספרות לא מופיעות ברצף?
  
- (4) בארונות 4 מגירות. ילד התבקש על ידי אמו לסדר 6 משחקים בארונות. הילד מכניס את המשחקים באקראי למגירות השונות. כל מגירה יכולה להכיל את כל המשחקים יחד.
  - א. מה ההסתברות שהילד יכניס את כל המשחקים למגירה העליונה?
  - ב. מה ההסתברות שהילד יכניס את כל המשחקים לאותה מגירה?
  - ג. מה ההסתברות ש"דומינו" יוכנס למגירה העליונה ויתר המשחקים לשאר המגירות.
  - ד. מה ההסתברות ש"דומינו" לא יוכנס למגירה העליונה?

- (5) בעיר מסוימת מתמודדות למועצת העיר 4 מפלגות שונות: "הירוקים", "קדימה", "העבודה" ו"הליכוד". 6 אנשים אינם יודעים למי להצביע, ולכן בוחרים באקראי מפלגה כלשהי.
- מה ההסתברות שכל ה-6 יבחרו באותה מפלגה?
  - מה ההסתברות שמפלגת ה"ירוקים" לא תקבל קולות?
  - מה ההסתברות שמפלגת ה"ירוקים" תקבל בדיוק 3 קולות וכל מפלגה אחרת תקבל קול 1 בלבד?
  - מה ההסתברות שמפלגת "הירוקים" תקבל 2 קולות, מפלגת "העבודה" תקבל 2 קולות ומפלגת "הליכוד" תקבל 2 קולות?
- (6) 5 חברים נפגשו ורצו לראות סרט. לרשותם ספריה המונה 8 סרטים שונים. כל אחד התבקש לבחור סרט באקראי.
- מה ההסתברות שכולם יבחרו את אותו הסרט?
  - מה ההסתברות שכולם יבחרו את "הנוסע השמיני"?
  - מה ההסתברות שכל אחד יבחר סרט אחר?
  - מה הסיכוי שלפחות שניים יבחרו את אותו הסרט?
  - מה ההסתברות שיוסי וערן ייבחרו את "הנוסע השמיני" וכל השאר סרטים אחרים?
  - מה ההסתברות שהנוסע השמיני לא ייבחר על ידי אף אחד מהחברים?
  - לקחו את 8 הסרטים ויצרו מהם רשימה. נתון שברשימה 3 סרטי אימה, מה ההסתברות שברשימה שנוצרה יופיעו 3 סרטי האימה ברצף?
- (7) בקבוצה 10 אנשים. יש ליצור שתי וועדות שונות מתוך הקבוצה: אחת בת 4 אנשים והשנייה בת 3 אנשים. כל אדם יכול להיבחר רק לוועדה אחת. חשבו את מס' הדרכים השונות ליצירת הוועדות הללו כאשר:
- אין בוועדות תפקידים.
  - בכל וועדה יש תפקיד אחד של אחראי הוועדה.
  - בכל וועדה כל התפקידים שונים.
- (8) 4 גברים ו-3 נשים מתיישבים על כסאות בשורה של כסאות תיאטרון. בכל שורה 10 כסאות. בכמה דרכים שונות ניתן לבצע את ההושבה:
- ללא הגבלה.
  - כל הגברים ישבו זה ליד זה וגם כל הנשים תשבנה זו ליד זו.
  - שני גברים בקצה אחד ושני הגברים האחרים בקצה שני.
- (9) בהגרלה ישנם 10 מספרים מ-1 עד 10. נבחרו באקראי 5 מספרים. מה ההסתברות שהמספר 7 הוא השני בגודלו מבין המספרים שנבחרו?

**(10)** 6 אנשים עלו לאוטובוס שעוצר ב-10 תחנות.

כל אדם בוחר באופן עצמאי ואקראי באיזו תחנה לרדת.

- מה ההסתברות שכל אחד יורד בתחנה אחרת?
- מה ההסתברות שבדיוק 3 ירדו בתחנה החמישית?
- מה ההסתברות שרונית תרד בתחנה השנייה והשאר לא?
- מה ההסתברות שכולם ירדו בתחנות 5,6 ולפחות אחד בכל אחת מהתחנות הללו?

**(11)** ברכבת 4 מקומות ישיבה עם כיוון הנסיעה 41 מקומות

ישיבה נגד כיוון הנסיעה.

4 זוגות התיישבו במקומות אלו באקראי.

|      |  |  |  |  |  |  |      |
|------|--|--|--|--|--|--|------|
|      |  |  |  |  |  |  |      |
| חלון |  |  |  |  |  |  | מעבר |
|      |  |  |  |  |  |  |      |

- בכמה דרכים שונות ניתן להתיישב?
- מה ההסתברות שהזוג כהן ישבו זה לצד זה עם כיוון הנסיעה?
- מה ההסתברות שהזוג כהן ישבו זה לצד זה?
- מה ההסתברות שהזוג כהן ישבו כל אחד ליד החלון? (בכל שורה יש חלון).
- מה ההסתברות שהזוג כהן יישבו כך שכל אחד בכיוון נסיעה מנוגד?
- מה ההסתברות שהזוג כהן יישבו אחד מול השני פנים מול פנים.
- מה ההסתברות שכל הגברים ייסעו עם כיוון הנסיעה וכל הנשים תשבנה נגד כיוון הנסיעה?
- מה ההסתברות שכל זוג ישב אחד מול השני?

**(12)** סיסמא מורכבת מ-5 תווים, תווים אלו יכולים להיות ספרה (0-9) ואותיות

ה-ABC (26 אותיות). כל תו יכול לחזור על עצמו יותר מפעם אחת.

- כמה סיסמאות שונות יש?
- כמה סיסמאות שונות יש שבהן כל התווים שונים?
- כמה סיסמאות שונות יש שבהן לפחות ספרה אחת ולפחות אות אחת?

**(13)** מתוך קבוצה בת  $n$  אנשים רוצים לבחור 3 אנשים לוועדה. בכמה דרכים

שונות ניתן לבצע את הבחירה? בטא את תשובתך באמצעות  $n$ .

- בוועדה אין תפקידים ויש לבחור 3 אנשים שונים לוועדה.
- בוועדה תפקידים שונים. וכל אדם לא יכול למלא יותר מתפקיד אחת.
- בוועדה תפקידים שונים ואדם יכול למלא יותר מתפקיד אחד.

**(14)** שני אנשים מטילים כל אחד מטבע  $n$  פעמים. בטאו באמצעות  $n$  את הסיכוי

שלכל אחד מהם אותו מספר פעמים של התוצאה "ראש".

- 15** יוצרים קוד עם  $a$  ספרות (מותר לחזור על אותה ספרה בקוד).  
חשבו את ההסתברויות הבאות (בטאו את תשובותיכם באמצעות  $a$ ):
- בקוד אין את הספרה 5.
  - בקוד מופיעה הספרה 3.
  - בקוד לא מופיעות ספרות אי זוגיות.
- 16** זוג קוביות הוטלו מספר פעמים. כמה פעמים יש להטיל את זוג הקוביות בכדי שבהסתברות של לפחות 0.5 תתקבל לפחות הטלה אחת (של הזוג) עם סכום תוצאות 12?
- 17** בוחרים באופן מקרי מספר בין 6 ספרות.
- מה הסיכוי שהספרה 5 תופיע בדיוק פעם אחת במספר?
  - מה הסיכוי שהספרה 4 תופיע לפחות פעם אחת וגם הספרה 0 תופיע לפחות פעם אחת במספר?
- 18** במשרד של דנה 5 תיקיות אותן היא מסדרת באקראי בטור. 3 תיקיות הן אדומות ו-2 תיקיות הן כחולות. דנה רשמה שני פתקים ושמה כל פתק במקום אקראי בין התיקיות (לכל פתק יש 4 אפשרויות למיקום).
- מה הסיכוי ששני הפתקים יהיו במקומות שונים?
  - מה הסיכוי שבין שני הפתקים יש שתי תיקיות אדומות ואין תיקיות כחולות?
  - מה הסיכוי שבין שני הפתקים יש בדיוק תיקיה אחת?
  - מה הסיכוי שבין שני הפתקים יש שתי תיקיות ואחת מהן כחולה?
- 19** לירון 6 עטים אותם הוא מכניס באקראי ל-3 קלמרים שונים. לכל עט הוא בוחר באופן מקרי קלמר.
- מה הסיכוי שיש בדיוק 2 קלמרים שבכל קלמר בדיוק 2 עטים?
  - מה הסיכוי שיש בדיוק קלמר אחד שבו בדיוק 2 עטים?
  - מה הסיכוי שיש בדיוק 3 קלמרים שבכל אחד בדיוק 2 עטים?
- 20** מסדרים  $n$  כדורים שונים ב  $n$  תאים שונים (תא יכול להכיל יותר מכדור אחד). מה הסיכוי שבתא  $i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) יהיו בדיוק  $k$  כדורים?
- 21** בתחרות ריצה עלו לגמר 6 מתמודדים. רק בשלושת המקומות הראשונים זוכים במדליות. נניח שכל המתמודדים מסיימים את התחרות.
- כמה אפשרויות יש לסיים את התחרות?
  - כמה אפשרויות יש לכך שמתמודד מספר 6 יקבל מדליה?
  - כמה אפשרויות יש לכך שמתמודד מספר 6 יקבל מדליה או שמתמודד מספר 2 יקבל מדליית זהב?

**(22)** מטילים קובייה הוגנת  $k$  פעמים.

- א. מה הסיכוי שהתוצאה הכי גדולה שהתקבלה היא  $j$  ?
- ב. מה הסיכוי שהתוצאה הכי קטנה שהתקבלה היא  $i$  ?
- ג. עבור  $i \leq j$ , מה הסיכוי שהתוצאה הכי גדולה היא  $j$  וגם התוצאה הכי קטנה היא  $i$  ?

## תשובות סופיות:

- (1) א. 102,400,000    ב. 78,960,960    ג. 658008
- (2) א. 810,000    ב. 657,720    ג. 27,405
- (3) א. 14,040,000    ב. 1,404,000    ג. 5,616,000    ד. 8,424,000
- (4) א. 0.00024    ב. 0.00098    ג. 0.05933    ד. 0.75000
- (5) א. 0.00098    ב. 0.17798    ג. 0.02929    ד. 0.02197
- (6) א.  $\frac{1}{4096}$     ב.  $\frac{1}{32,768}$     ג. 0.205    ד. 0.795
- ה. 0.0105    ו. 0.5129    ז. 0.1071
- (7) א. 4,200    ב. 50,400    ג. 604,800
- (8) א. 604,800    ב. 2,880    ג. 2,880
- (9) 0.238
- (10) א. 0.1512    ב. 0.014    ג. 0.059    ד.  $\frac{62}{10^6}$
- (11) א. 40,320    ב. 0.1071    ג. 0.2142    ד. 0.0357
- ה. 0.5714    ו. 0.1429    ז. 0.0143    ח. 0.0095
- (12) א. 60,466,176    ב. 45,239,040    ג. 48,484,800
- (13) א.  $\frac{n!}{3!(n-3)}$     ב.  $n \cdot (n-1)(n-2)$     ג.  $n^3$
- (14)  $\frac{1}{4^n} \cdot \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2$
- (15) א.  $0.9^a$     ב.  $1 - 0.9^a$     ג.  $0.5^a$
- (16) לפחות 25 פעמים.
- (17) א. 0.35721    ב. 0.1759
- (18) א. 0.75    ב. 0.075    ג. 0.375    ד. 0.15
- (19) א. 0    ב.  $\frac{450}{729}$     ג.  $\frac{90}{729}$
- (20)  $\frac{\binom{n}{k} (n-1)^{n-k}}{n^n}$
- (21) א. 720    ב. 360    ג. 432

$$(22) \quad \begin{array}{l} \text{א. } \frac{j^k - (j-1)^k}{6^k} \\ \text{ב. } \frac{(7-i)^k - (6-i)^k}{6^k} \\ \text{ג. } \frac{(j-i+1)^k - 2 \cdot (j-i)^k + (j-i-1)^k}{6^k} \end{array}$$