תורת ההסתברות

פרק 8 - קומבינטוריקה - דגימה ללא סדר וללא החזרה (פרק 1,2 ממ"ח 01)

תוכן העניינים

1. כללי 1

קומבינטוריקה – דגימה ללא סדר וללא החזרה:

רקע:

מדגם לא סדור בדגימה ללא החזרה:

מספר האפשרויות לדגום k עצמים שונים מתוך n עצמים שונים כאשר אין משמעות לסדר העצמים הנדגמים ואין החזרה: $\frac{n!}{(n-k)!k!}=\binom{n}{k}=\frac{(n)_k}{k!}$.

דוגמה:

מתוך 10 תלמידים יש לבחור שלושה נציגים לוועד ללא תפקידים מוגדרים:

$$\binom{10}{3}=\frac{10!}{7!\cdot 3!}=120.$$

הערות:

1) $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$.

2) $\binom{n}{n-1}=\binom{n}{1}=n$.

3) $\binom{n}{n}=\binom{n}{0}=1$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) בכיתה 15 בנות ו-10 בנים. יש לבחור 5 תלמידים שונים מהכיתה לנציגות הכיתה. בכמה דרכים אפשר להרכיב את הנציגות, אם:

א. אין שום הגבלה לבחירה.
ב. מעוניינים ש-3 בנות ו-2 בנים ירכיבו את המשלחת.
ג. לא יהיו בנים במשלחת.

2) סטודנט מעוניין לבחור 5 קורסי בחירה בסמסטר זה. לפניו רשימה של 10 קורסים לבחירה: 5 במדעי הרוח, 3 במדעי החברה, 2 במתמטיקה.

א. כמה בחירות שונות הוא יכול ליצור לעצמו?
ב. כמה בחירות יש לו בהן 3 קורסים הם ממדעי הרוח?
ג. כמה בחירות יש לו אם 2 מהן לא ממדעי הרוח?
ד. כמה בחירות יש לו אם 2 ממדעי הרוח, 2 ממדעי החברה ו-1 ממתמטיקה?

3) בכיתה 30 תלמידים מתוכם 12 תלמידים ו-18 תלמידות.
יש לבחור למשלחת 4 תלמידים מהכיתה. התלמידים נבחרים באקראי.

א. מה ההסתברות שהמשלחת תורכב רק מבנות?
ב. מה ההסתברות שבמשלחת תהיה רק בת אחת?
ג. מה ההסתברות שבמשלחת תהיה לפחות בת אחת?

4) במשחק הלוטו יש לבחור 5 מספרים מתוך 45. המספרים הם 1-45.

א. מה ההסתברות שבמשחק הזוכה כל המספרים הם זוגיים?
ב. מה ההסתברות שבמספר הזוכה יש לכל היותר מספר זוגי אחד?
ג. מה ההסתברות שבמספר הזוכה לפחות פעם אחת יש מספר זוגי?
ד. מה ההסתברות שבמספר הזוכה כל המספרים גדולים מ-30?

5) בחפיסת קלפים ישנם 52 קלפים: 13 בצבע שחור בצורת עלה, 13 בצבע אדום בצורת לב, 13 בצבע אדום בצורת יהלום ו-13 בצבע שחור בצורת תלתן.
מכל צורה (מתוך ה-4) יש 9 קלפים שמספרם 2-10, שאר הקלפים הם: נסיך, מלכה, מלך ואס (בעצם מדובר בקופסת קלפים רגילה ללא ג'וקר).
שני אנשים משחקים פוקר. כל אחד מקבל באקראי 5 קלפים (ללא החזרה).

א. מה ההסתברות שעודד יקבל את כל המלכים וערן את כל המלכות?
ב. מה ההסתברות שאחד השחקנים יקבל את הקלף אס-לב?
ג. מה ההסתברות שערן יקבל קלפים שחורים בלבד ועודד יקבל שני קלפים שחורים בדיוק?
ד. מה ההסתברות שערן יקבל לפחות 3 קלפים שהם מספר (אס אינו מספר)?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

6) במכללה 4 מסלולי לימוד. בכל מסלול לימוד 5 מזכירות. יש ליצור וועד של 5 מזכירות מתוך כלל המזכירות במכללה. יוצרים וועד באופן אקראי.
חשבו את ההסתברויות הבאות:

א. כל המזכירות בוועד יהיו ממסלול "מדעי ההתנהגות".
ב. כל המזכירות בוועד יהיו מאותו המסלול.
ג. מכל מסלול תבחר לפחות מזכירה אחת.

7) הוכיחו כי: $\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$.

8) $2n$ בנים ו-$2n$ בנות מתחלקים ל-2 קבוצות.

א. בכמה דרכים שונות ניתן לבצע את החלוקה אם שתי הקבוצות צריכות להיות שוות בגודלן ויש בכל קבוצה מספר שווה של בנים ובנות?

ב. בכמה דרכים ניתן לבצע את החלוקה אם יש מספר שווה של בנים ובנות בכל קבוצה אבל הקבוצות לא בהכרח בגודל שווה.

תשובות סופיות:

1) א. 53130. ב. 20475. ג. 3003.

2) א. 252. ב. 100. ג. 100. ד. 60.

3) א. 0.1117. ב. 0.1445. ג. 0.9819.

4) א. 0.02. ב. 0.187. ג. 0.972. ד. 0.00246.

5) א. 0. ב. 0.1923. ג. 0.009. ד. 0.837.

6) א. $6.45\cdot10^{-5}$. ב. $2.58\cdot10^{-4}$. ג. 0.3225.

7) שאלת הוכחה.

8) א. $\binom{2n}{n}^2$. ב. $\sum_{i=1}^{n}\binom{2n}{i}^2$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל