

תורת הגלים להנדסה רפואית

פרק 5 - קווי תמסורת

תוכן העניינים

1. קווי תמסורת ללא הפסדים.....1

קווי תמסורת ללא הפסדים

רקע

הקשרים בין המתח לזרם (בקו ללא הפסדים):

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -L_0 \frac{\partial I}{\partial t} \qquad \frac{\partial I}{\partial x} = -C_0 \frac{\partial V}{\partial t}$$

משוואות הגלים:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = L_0 C_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \qquad \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} = L_0 C_0 \frac{\partial^2 I}{\partial t^2}$$

כאשר C_0 ו- L_0 הם הקיבול וההשראות ליחידת אורך.

עכבה

עכבה כללית מוגדרת לפי: $Z = \frac{V}{I}$ והיא יכולה להיות תלויה במיקום עכבה אופיינית:

$$\frac{V^+(x, t)}{I^+(x, t)} = -\frac{V^-(x, t)}{I^-(x, t)} = Z_0 = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}$$

לא תלויה במיקום (בדרי"כ כשנתונה העכבה הכוונה לעכבה אופיינית).

החזרה והעברה

$$V^-(x_0, t) = -rV^+(x_0, t) \qquad I^-(x_0, t) = rI^+(x_0, t)$$

$$r = \frac{Z_0 - Z_L}{Z_L + Z_0}$$

$$V_L^+(x_0, t) = tV^+(x_0, t) \qquad I_L^+(x_0, t) = tI^+(x_0, t)$$

$$t = \frac{2Z_0}{Z_L + Z_0}$$

הערה: הנוסחאות הן בהנחה שאין גל חוזר בעומס.

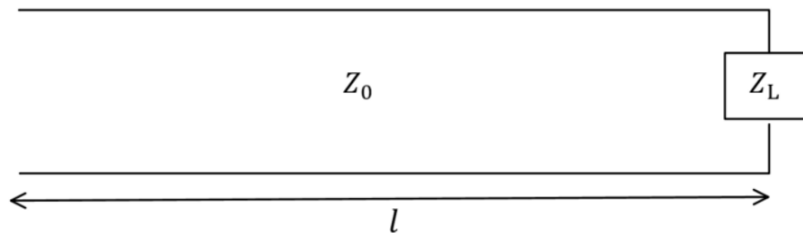
כאשר יש קצר בקצה בקו, $Z_L = 0$, מקבלים גל עומד.

שאלות

(1) עכבת כניסה

קו תמסורת באורך l ועכבה אופיינית Z_0 מחובר בקצה לעומס בעל עכבה אופיינית Z_L . הניחו כי אין גל חוזר בעומס וכי אמפליטודת הגל המתקדם בכיוון החיובי ידועה.

- רשמו את פונקציות המתח והזרם של הגל הפוגע והגל החוזר אם ראשית הצירים נמצאת בנקודת החיבור עם העומס.
- חזרו על סעיף א אם הראשית בתחילת הקו.
- חשבו עבור סעיפים א' ו- ב' את העכבה בתחילת הקו, עכבה זו נקראת עכבת הכניסה Z_{in} .
- חשבו עבור סעיף ב את העכבה בדיוק באמצע הקו.



(2) גל בכבל קואקסיאלי פוגע בצומת

נתון קו תמסורת חשמלי המורכב מכבל קואקסיאלי ארוך מאוד שבו צומת כך שהעכבות האופייניות משני צידי הצומת הן Z_1 ו- Z_2 . לצומת מגיע גל הרמוני. נתונים האמפליטודה, התדירות ואורך הגל של גל הזרם המגיע לצומת: $\omega, \lambda_1 I_0^+$. על סמך הנתונים הנ"ל:

- האם ניתן לחשב את אמפליטודת גל הזרם העובר והחוזר?
- האם ניתן לחשב את אמפליטודות של שלושת גלי המתח?
- האם ניתן לחשב את אורך הגל של הגל החוזר ואת אורך הגל של הגל העובר?
- האם ניתן לחשב את ההספק של כל אחד מהגלים?

(3) קו תמסורת פתוח עם תנאי התחלה

נתון קו תמסורת בעל השראות ליחידת אורך של: $0.03 nH/m$
 וקיבוליות ליחידת אורך של: $4 \mu F/m$. אורך הקו הוא: $l = 400 m$
 והוא פתוח משני קצותיו.
 ברגע: $t = 0$ המתח בקו מתאפס והזרם הוא:

$$I(x) = \begin{cases} I_0 \frac{x}{l} & , 0 \leq x \leq l/2 \\ 0 & , l/2 \leq x \leq l \end{cases}$$

כאשר: $I_0 = 20 A$.

- מהי מהירות הגלים בקו? האם הקו נמצא בריק?
- בקירוב של שתי הרמוניות ראשונות, חשבו את הזרם ב- $t = 3 \mu s$ כתלות ב- x .
- מהו המתח באותו זמן בקצוות ובמרכז הקו?

(4) קו תמסורת אינסופי עם תנאי התחלה

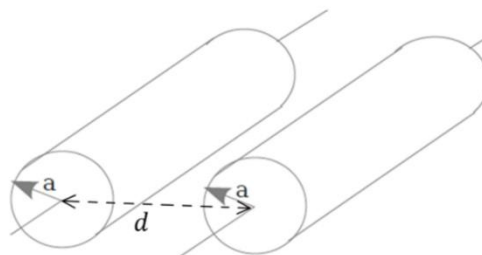
קו תמסורת עשוי מכבל קואקסיאלי אינסופי בעל עכבה אופיינית של 25Ω
 וקיבול ליחידת אורך של: $C_0 = 0.2 nF/m$.

- חשבו את מהירות הגלים והקבוע הדיאלקטרי היחסי ϵ_r .
 ניתן להניח: $\mu_r = 1$.
- נתון כי: $V(x, t = 0) = \frac{aV_0x}{x^2 + a^2}$ וכי: $I(x, t = 0) = 0$
 כאשר: a, V_0 נתונים.
 חשבו את גלי המתח והזרם כתלות במיקום ובזמן.
- מהי האנרגיה הכוללת החולפת ב- $x = 50 m$ מ- $t = 0$ ועד $t = 1 ms$.
 מספיק לרשום את האינטגרל אין צורך לפתור אותו.

(5) חישוב השראות וקיבול בכבלים מקבילים

נתון קו תמסורת העשוי משני כבלים ארוכים מאוד בעלי רדיוס a ומרחק d
 בין מרכזיהם. הניחו ש- $d \gg a$ וכי התפלגות המטען על הכבלים היא אחידה
 ביחס לסיבוב הכבל.

- מהו הקיבול ליחידת אורך של הכבלים?
- מהי ההשראות ליחידת אורך של הכבלים?



6) חישוב השראות וקיבול בכבל קואקסיאלי

כבל קואקסיאלי ארוך מאוד עשוי ממעטפת גלילית ברדיוס a ומעטפת חיצונית ברדיוס b וריק ביניהם.

א. מהו הקיבול ליחידת אורך של הכבל?

ב. מהי ההשראות ליחידת אורך של הכבל?

ג. מהי מהירות הגלים בכבל?

תשובות סופיות

$$(1) \text{ א. } I^-(x) = r \frac{V_0^+}{Z_0} e^{-ikx}, I^+(x) = \frac{V_0^+}{Z_0} e^{ikx}, V^-(x) = -rV_0^+ e^{-ikx}, V^+(x) = V_0^+ e^{ikx}$$

$$\text{ב. } I^-(x) = r \frac{V_0^+}{Z_0} e^{2ikl} e^{-ikx}, I^+(x) = \frac{V_0^+}{Z_0} e^{ikx}, V^-(x) = -rV_0^+ e^{2ikl} e^{-ikx}, V^+(x) = V_0^+ e^{ikx}$$

$$\text{ג. בשני המקרים: } Z_{in} = Z_0 \frac{1 - re^{2ikl}}{1 + re^{2ikl}}$$

$$\text{ד. } Z_0 \frac{1 - re^{ikl}}{1 + re^{ikl}}$$

$$(2) \text{ א. כן. ב. כן. ג. אורך הגל החוזר זהה לאורך הגל הפוגע, אין מספיק נתונים לחשב את אורך הגל העובר. ד. אין מספיק נתונים לחשב את אורך הגל העובר.}$$

$$(3) \text{ א. } 9.13 \cdot 10^9 \frac{m}{sec} \text{ ב. } 3.39_A \sin\left(\frac{\pi}{400}x\right) - 2.91 \sin\left(\frac{2\pi}{400}x\right) \text{ ג. } V(0, 3\mu s) = -0.13V, V(l, 3\mu s) = 1.73V, V\left(\frac{l}{2}, 3\mu s\right) = 0.798V$$

$$(4) \text{ א. } \epsilon_r = 2.25, V = 2 \cdot 10^8 \frac{m}{sec}$$

$$\text{ב. } V(x, t) = \frac{1}{2} \left[\frac{aV_0(x-Vt)}{(x-Vt)^2 + a^2} + \frac{aV_0(x+Vt)}{(x+Vt)^2 + a^2} \right]$$

$$I(x, t) = \frac{aV_0}{2VL_0} \left[\frac{x-Vt}{(x-Vt)^2 + a^2} - \frac{x+Vt}{(x+Vt)^2 + a^2} \right]$$

$$\text{ג. } \Delta E = \int_0^{0.001} V(50, t) I(50, t) dt$$

$$(5) \text{ א. } \frac{\pi \epsilon_0}{\ln \left| \frac{d-a}{a} \right|} \text{ ב. } \frac{\mu_0}{\pi} \ln \left| \frac{d-a}{a} \right|$$

$$(6) \text{ א. } \frac{2\pi \epsilon_0}{\ln \frac{b}{a}} \text{ ב. } \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \text{ ג. מהירות האור.}$$