# אלגברה לינארית

## פרק 13 - קבוצות אורתוגונליות, בסיסים אורתוגונליים, התהליך של גרם-שמידט

תוכן העניינים


1. בסיס אורתוגונלי, שוויון פרסבל, אי-שוויון בסל ..... 1
2. ההיטל של וקטור ..... 5
3. תהליך גרם-שמידט ..... 8

# בסיס אורתוגונלי, שוויון פרסבל, אי-שוויון בסל

## שאלות

**1)** נתונה קבוצת וקטורים $S=\{(2,1,-4),(1,2,1),(3,-2,1)\}$ ב- $\mathbb{R}^3$.

א. הראו שהקבוצה $S$ אורתוגונלית.

ב. נרמלו את הקבוצה לקבלת קבוצה אורתונורמלית.

ג. ללא חישוב, הוכיחו שהקבוצה מהווה בסיס ל- $\mathbb{R}^3$.

**2)** נתונה קבוצת וקטורים $S=\{(2,1,-4),(1,2,1),(3,-2,1)\}$ ב- $\mathbb{R}^3$.

ללא דירוג, תוך שימוש במכפלות פנימיות, רשמו את הווקטור $(13,-1,7)$, כצירוף לינארי של איברי $S$.

**3)** נתונה קבוצת וקטורים $S=\{(2,1,-4),(1,2,1),(3,-2,1)\}$ ב- $\mathbb{R}^3$.

רשמו את וקטור הקואורדינטות של וקטור כלשהו $v=(a,b,c)$ ב- $\mathbb{R}^3$, ביחס לבסיס $S$.

**4)** נניח ש- $\{u_1,u_2,\dots,u_n\}$ היא בסיס אורתוגונלי ל- $V$.

הוכיחו שלכל $v\in V$, אז $v=\frac{\langle v,u_1\rangle}{\langle u_1,u_1\rangle}u_1+\frac{\langle v,u_2\rangle}{\langle u_2,u_2\rangle}u_2+\dots+\frac{\langle v,u_n\rangle}{\langle u_n,u_n\rangle}u_n$.

הערה: הקבוע $a_i=\frac{\langle v,u_i\rangle}{\langle u_i,u_i\rangle}$ נקרא מקדם פורייה של $v$ ביחס ל- $u_i$, או הרכיב של $v$ ביחס ל- $u_i$.

**5)** נתונה קבוצת פונקציות $S=\{\cos x,\cos 2x,\cos 3x,\dots\}$ ב- $V=C[0,\pi]$.

האם הקבוצה אורתוגונלית? אם כן, האם היא אורתונורמלית?
במידה והקבוצה אורתוגונלית ולא אורתונורמלית,
נרמלו אותה לקבלת קבוצה אורתונורמלית.
ענו ביחס למכפלה הפנימית האינטגרלית.

**6)** נתונה קבוצת פונקציות $S=\{1,\cos x,\sin x,\cos 2x,\sin 2x,\dots\}$ ב- $V=C[0,2\pi]$.

האם הקבוצה אורתוגונלית? אם כן, נרמלו אותה לקבלת קבוצה אורתונורמלית.
ענו ביחס למכפלה הפנימית האינטגרלית.
האם הקבוצה מהווה בסיס?


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**7)** נתונה קבוצה $S=\{(2,4,4),(4,-1,-1),(0,2,-2)\}$ ב- $\mathbb{R}^3$.
בדקו האם הקבוצה $S$ אורתוגונלית.
האם היא בסיס אורתוגונלי? האם היא אורתונורמלית?
האם היא בסיס אורתונורמלי?
במידה והקבוצה אורתוגונלית אך לא אורתונורמלית, נרמלו אותה.

**8)** נתונה קבוצה $S=\{1,x,x^2,x^3\}$ ב- $P_3[R]$.
בדקו האם הקבוצה $S$ אורתוגונלית.
האם היא בסיס אורתוגונלי? האם היא אורתונורמלית?
האם היא בסיס אורתונורמלי?
במידה והקבוצה אורתוגונלית אך לא אורתונורמלית, נרמלו אותה.
(ענו ביחס למכפלה הפנימית האינטגרלית ב- $[0,1]$)

**9)** נתונה קבוצה $S=\{1,2x-1,6x^2-6x+1\}$ ב- $P_2[R]$.
בדקו האם הקבוצה $S$ אורתוגונלית.
האם היא בסיס אורתוגונלי? האם היא אורתונורמלית?
האם היא בסיס אורתונורמלי?
במידה והקבוצה אורתוגונלית אך לא אורתונורמלית, נרמלו אותה.
(ענו ביחס למכפלה הפנימית האינטגרלית ב- $[0,1]$)

**10)** נתונה הקבוצה $S=\left\{\begin{pmatrix}2&4&6\\0&2&4\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\right\}\subseteq M_3[R]$.
בדקו: האם הקבוצה $S$ אורתוגונלית? האם היא בסיס אורתוגונלי?
האם היא אורתונורמלית? האם היא בסיס אורתונורמלי?
במידה והקבוצה אורתוגונלית אך לא אורתונורמלית, נרמלו אותה.
ענו ביחס למכפלה הפנימית הסטנדרטית של המטריצות.

**11)** נסחו והוכיחו את שוויון פרסבל.

**12)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. יהי $B=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1),\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)\right\}$ בסיס אורתונורמלי של $R^2$.
אמתו את שוויון פרסבל עבור וקטור כלשהו $v\in R^2$.

ב. יהי $B=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0),\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0),(0,0,1)\right\}$ בסיס אורתונורמלי של $R^3$.
אמתו את שוויון פרסבל עבור וקטור כלשהו $v\in R^3$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**13)** יהי $D=\left\{A_1=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},A_2=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1\\1&-1\end{pmatrix},A_3=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix},A_4=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}\right\}$.

א. הוכיחו ש- $D$ מהווה בסיס אורתונורמלי של $M_2(R)$ עם המכפלה הפנימית $\langle A,B\rangle=tr\left(B^TA\right)$.

ב. כתבו את שוויון פרסבל עבור מטריצה כללית $A\in M_2(R)$ עם המכפלה הפנימית לעיל.

**14)** במרחב $C([-\pi,\pi])$ של כל הפונקציות הרציפות בקטע $[-\pi,\pi]$ נגדיר את המכפלה הפנימית הבאה $\langle f,g\rangle=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g(x)dx$.

תהי $\{f_1(x)=\cos x,\ f_2(x)=\sin x\}$ מערכת אורתונורמלית במרחב זה.

אמתו את אי שוויון בסל עבור הפונקציה $f(x)=\begin{cases}x & x\ge 0\\0 & x<0\end{cases}$ ביחס למערכת הנתונה.

**15)** במרחב $C([-\pi,\pi])$ של כל הפונקציות הרציפות בקטע $[-\pi,\pi]$ נגדיר את המכפלה הפנימית הבאה $\langle f,g\rangle=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g(x)dx$.

תהי $\{f_1=\sin x,f_2=\sin(2x),\dots,f_{60}=\sin(60x)\}$ מערכת אורתונורמלית במרחב זה.

כתבו את אי שוויון בסל עבור הפונקציה $f(x)=\begin{cases}-1 & -\pi<x<0\\0 & x=0\\1 & 0<x<\pi\end{cases}$ ביחס למערכת הנתונה.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1)** א. שאלת הוכחה. ב. $S\left\{\frac{(2,1,-4)}{\sqrt{2^2+1^2+(-4)^2}},\frac{(1,2,1)}{\sqrt{6}},\frac{(3,-2,1)}{\sqrt{14}}\right\}$

ג. שאלת הוכחה.

**2)** $(13,-1,7)=\frac{-1}{7}(2,1,4)+3(1,2,1)+\frac{24}{7}(3,-2,1)$

**3)** $\frac{2a+b-4c}{21}(2,1,4)+\frac{a+2b+c}{6}(1,2,1)+\frac{3a-2b+c}{14}(3,-2,1)$

**4)** שאלת הוכחה.

**5)** הקבוצה אורתוגונלית, הקבוצה לא אורתונורמלית,

$$S=\left\{\frac{\cos x}{\sqrt{0.5\pi}},\frac{\cos 2x}{\sqrt{0.5\pi}},\frac{\cos 3x}{\sqrt{0.5\pi}},\dots\right\}$$

**6)** הקבוצה אורתוגונלית, הקבוצה לא אורתונורמלית,

$$S=\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\frac{\cos x}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin x}{\sqrt{\pi}},\frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}},\dots\right\}$$

**7)** הקבוצה אורתוגונלית, הקבוצה מהווה בסיס אורתוגונלי, הקבוצה אינה אורתונורמלית, $S=\left\{\frac{1}{\sqrt{36}}(2,4,4),\frac{1}{\sqrt{8}}(4,-1,-1),\frac{1}{\sqrt{18}}(0,2,-2)\right\}$

**8)** הקבוצה לא אורתוגונלית.

**9)** הקבוצה אורתוגונלית, הקבוצה מהווה בסיס אורתוגונלי,

$$S=\left\{1,\sqrt{3}(2x-1),\sqrt{5}\left(6x^2-6x+1\right)\right\}$$

**10)** הקבוצה אורתוגונלית, הקבוצה אינה בסיס אורתוגונלי, הקבוצה לא אורתונורמלית, $S=\left\{\frac{1}{\sqrt{80}}\begin{pmatrix}2&4&6\\0&2&4\\0&0&2\end{pmatrix},\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\right\}$

**11)** שאלת הוכחה.

**12)** שאלת הוכחה.

**13)** שאלת הוכחה.

**14)** שאלת הוכחה.

**15)** $2\ge\frac{16}{\pi^2}\left[\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\dots+\frac{1}{59^2}\right]$


כתב ופתר – גיא סלומון ©

# ההיטל של וקטור

## שאלות

**1)** מצאו את מקדם פורייה $c$ ואת ההיטל של $v=(1,2,2)$
לאורך $w=(0,1,-1)$, ב- $\mathbb{R}^3$.

**2)** מצאו את מקדם פורייה $c$ ואת ההיטל של $v=(1,-2,2,0)$
לאורך $w=(0,2,-1,2)$, ב- $\mathbb{R}^4$.
מקובל לסמן גם $\text{proj}(v,w)$.

**3)** מצאו את מקדם פורייה $c$ ואת ההיטל של $p(x)=2x-1$ לאורך $q(x)=x^2$,
במרחב הפולינומים עם המכפלה הפנימית האינטגרלית ב- $[0,1]$.

**4)** מצאו את מקדם פורייה $c$ ואת ההיטל של $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ לאורך $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{pmatrix}$,
במרחב המטריצות הממשיות מסדר 2 עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית.

**5)** יהי $V=R^3$ ויהי $W=span\{w_1=(1,2,1),w_2=(1,-11)\}$ תת מרחב של $V$.
מצאו את ההיטל של הווקטור $v=(-2,2,2)$ על תת המרחב $W$ לפי המכפלה
הפנימית הסטנדרטית ב- $V=R^3$.
בנוסף, רשמו את $v$ כסכום $v=v_{\parallel}+v_{\perp}$, כאשר $v_{\parallel}\in W,\ v_{\perp}\in W^{\perp}$.

**6)** יהי $V=R^4$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית.
ויהי $W=span\{w_1=(1,1,0,-1),w_2=(1,0,11),w_3=(0,-1,1,-1)\}$ תת מרחב של $V$.
מצאו את הווקטור הקרוב ביותר לווקטור $v=(3,4,5,6)$ בתת המרחב $W$.
בנוסף, כתבו את $v$ כסכום של וקטור מ- $W$ ווקטור מ- $W^{\perp}$.

**7)** יהי $V=C([0,1])$ מרחב הפונקציות הרציפות על הקטע $[0,1]$.
ויהי $W=span\left\{w_1=1,w_2=x-\frac{1}{2}\right\}$ תת מרחב של $V$.
מצאו את ההיטל של $v=4x^2-4$ על $W$ עם המכפלה הפנימית האינטגרלית
הסטנדרטית. בנוסף, כתבו את $v$ כסכום של וקטור מ- $W$ ווקטור מ- $W^{\perp}$.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

**8)** נתון המרחב $C([-1,1])$ עם המכפלה הפנימית $\langle f,g\rangle=\int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$.

נגדיר תת מרחב של $C([-1,1])$ : $W=sp\{f_1=|x|+x, f_2=|x|-x\}$.

מצאו את ההיטל של $f(x)=x^2$ על $W$.

**9)** נתון המרחב $C([-\pi,\pi])$ עם המכפלה הפנימית $\langle f,g\rangle=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$.

נגדיר תת מרחב של $C([-\pi,\pi])$ :

$W=sp\{f_1=\sin x, f_2=\sin(2x),\dots,f_{60}=\sin(60x)\}$ .

ידוע שהקבוצה $\{f_i\}_{i=1}^{60}$ היא קבוצה אורתונורמלית.

מצאו את ההיטל של $f(x)=\begin{cases}-1 & -\pi<x<0\\ 0 & x=0\\ 1 & 0<x<\pi\end{cases}$ על $W$.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) $\text{proj}(v,w)=cw=0,\quad c=0$

2) $\text{proj}(v,w)=cw=-\frac{2}{3}(0,2,-1,2),\quad c=\frac{-2}{3}$

3) $\text{proj}(p,q)=c\cdot q(x)=\frac{5}{6}x^2,\quad c=\frac{5}{6}$

4) $\text{proj}(A,B)=cB=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{pmatrix},\quad c=\frac{1}{6}$

5) $v=v_{\parallel}+v_{\perp}=(0,2,0)+(-2,0,2)\ ,\pi(v)=(0,2,0)$

6) $(3,4,5,6)=v_{\parallel}+v_{\perp}=(5,2,3,6)+(-2,2,2,0)\ ,\pi(v)=(5,2,3,6)$

7) $v=v_{\parallel}+v_{\perp}=\left(-\frac{14}{3}+4x\right)+\left(4x^2-4x+\frac{2}{3}\right)\ ,\pi(v)=-\frac{14}{3}+4x$

8) $proj_W f=\frac{3}{4}|x|$

9) $proj_W f=\frac{4\sin(x)}{\pi}+\frac{4\sin(3x)}{3\pi}+\frac{4\sin(5x)}{5\pi}+\ldots+\frac{4\sin(59x)}{59\pi}$


כתב ופתר – גיא סלומון ©

# תהליך גרם-שמידט

## שאלות

**1)** נתון: $U = span\{(1,2,3),(4,5,6),(7,8,9)\} \subseteq \mathbb{R}^3$.
מצאו בסיס אורתונורמלי ל- $U$.

**2)** נתון: $U = span\{(2,2,2,2),(1,1,2,4),(1,2,-4,-3)\} \subseteq \mathbb{R}^4$.
מצאו בסיס אורתונורמלי ל- $U$.

**3)** נתון: $U = span\{4,x,x^2,x^3\} \subseteq P_3[x]$.
מצאו בסיס אורתונורמלי ל- $U$,
בהתייחס למכפלה הפנימית האינטגרלית בקטע $[-1,1]$.

**4)** נתון: $U = span\left\{\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 2\\-1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 2\\1 & 1\end{pmatrix}\right\} \subseteq M_2[R]$.
מצאו בסיס אורתונורמלי ל- $U$,
בהתייחס למכפלה הפנימית הרגילה של המטריצות.

## תשובות סופיות

**1)** $$B_{orthonormal} = \left\{\frac{1}{\sqrt{15}}(1,2,3),\frac{1}{\sqrt{21}}(-4,-1,2)\right\}$$

**2)** $$B_{orthonormal} = \left\{w_1 = \frac{(2,2,2,2)}{\sqrt{16}}, w_2 = \frac{(-1,-1,0,2)}{\sqrt{6}}, w_3 = \frac{(1,3,-6,2)}{\sqrt{50}}\right\}$$

**3)** $$B_{orthonormal} = \left\{\hat{w}_1 = \frac{4}{\sqrt{32}}, \hat{w}_2 = \frac{x}{\sqrt{\frac{2}{3}}}, \hat{w}_3 = \frac{3x^2-1}{\sqrt{\frac{8}{5}}}, \hat{w}_4 = \frac{5x^3-3x}{\sqrt{\frac{8}{7}}}\right\}$$

**4)** $$B_{orthonormal} = \left\{\hat{w}_1 = \frac{\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}}{\sqrt{30}}, \hat{w}_2 = \frac{\begin{pmatrix}7 & 14\\-9 & -2\end{pmatrix}}{\sqrt{330}}, \hat{w}_3 = \frac{\begin{pmatrix}-4 & 3\\2 & -2\end{pmatrix}}{\sqrt{33}}\right\}$$


כתב ופתר – גיא סלומון ©