משוואות של פיסיקה מתמטית

פרק 2 - פתרון מד"רים על ידי טורים

תוכן העניינים

1. פתרון מדר בעזרת טורים - נקודה רגולרית 1
2. פתרון מדר בעזרת טורים - נקודה רגולרית-סינגולרית 3
3. נוסחאות - טורי מקלורן של פונקציות חשובות 5

פתרון מדר בעזרת טורים – נקודה רגולרית

בסוף ספר הפרק יש דף נוסחאות לטורי מקלורן של פונקציות חשובות.

שאלות

פתרו את המשוואות בשאלות **1-7** על ידי פיתוח הפתרון לטור חזקות סביב $x=0$.
במיוחד, רשמו נוסחה רקורסיבית (נוסחת נסיגה) עבור האיבר הכללי,
וציינו את ארבעת האיברים הראשונים בפיתוח של הטור.

תזכורת: טור חזקות סביב $x=0$ שקול לטור טיילור סביב $x=0$ ושקול לטור מקלורן.

1) $y''-2x^2y'+4xy=x^2+2x+2 \qquad y(0)=3,\quad y'(0)=12;$

2) $y''-xy=0 \quad ; \quad y(0)=1,\ y'(0)=2$

3) $(1-x^2)y''-2xy'+2y=0$

4) $(x^2+4)y''+xy=x+2$

5) $y''+(x-1)y'+(2x-3)y=0$

6) $y''+ty=e^{t+1} \qquad y(0)=a_0=1,\quad y'(0)=a_1=2;$

7) $y''+(t-1)y'+(2t-3)y=0$ (השתמש בפתרון בסימן $\sum$)

8) פתרו את המשוואה $y''(x)+(x-1)y(x)=e^x$; $y(1)=1$, $y'(1)=2$,
על ידי פיתוח הפתרון לטור חזקות סביב $x=1$.

9) פתרו את המשוואה $y''+xy'+(2x-1)y=0$; $y(-1)=2,\quad y'(-1)=-2$.

רמז: תנאי ההתחלה מרמז על כך שכדאי לפתח את הפתרון לטור חזקות סביב $x=-1$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $y=3+12x+x^2-\frac{5}{3}x^3-\frac{23}{12}x^4+\ldots+a_nx^n\ldots \quad , \quad a_n=\frac{2n-10}{(n-1)n}a_{n-3}\ (n\ge 5)$

2) $y=1+2x+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{6}x^4+\ldots+a_nx^n+\ldots \quad , \quad a_n=\frac{1}{(n-1)n}a_{n-3}\ (n\ge 3)$.

3) $y=a_0+a_1x+-a_0x^2+0x^3-\frac{1}{3}a_0x^4+\ldots+a_nx^n+\ldots \quad , \quad a_n=\frac{n-3}{n-1}a_{n-2}\quad (n\ge 2)$

4)
$$y=a_0+a_1x+\frac{1}{4}x^2+\left(\frac{1-a_0}{24}\right)x^3+\left(\frac{-1}{48}a_1-\frac{1}{96}\right)x^4+\ldots+a_nx^n$$
$$a_n=\frac{-1}{4(n-1)n}a_{n-3}-\frac{(n-2)(n-3)}{4(n-1)n}a_{n-2}\ ,\ (n\ge 4)$$

5)
$$y=a_0+a_1x+\left(\frac{1}{2}a_1+\frac{3}{2}a_0\right)x^2+\left(\frac{1}{2}a_1+\frac{1}{6}a_0\right)x^3+\frac{1}{6}a_0x^4+\ldots+a_nx^n+\ldots$$
$$a_n=\frac{1}{n}a_{n-1}-\frac{n-5}{n(n-1)}a_{n-2}-\frac{2}{n(n-1)}a_{n-3}\quad (n\ge 3)$$

6)
$$y(t)=1+2t+\frac{e}{2}t^2+\frac{e-1}{6}t^3+\frac{e-4}{24}t^4+\ldots+a_nt^n+\ldots$$
$$a_n=\frac{e}{n(n-1)(n-2)!}-\frac{a_{n-3}}{n(n-1)}\quad (n\ge 3)$$

7)
$$y=a_0+a_1t+\left(\frac{1}{2}a_1+\frac{3}{2}a_0\right)t^2+\left(\frac{1}{2}a_1+\frac{1}{6}a_0\right)t^3+\frac{1}{6}a_0t^4+\ldots+a_nt^n+\ldots$$
$$a_n=\frac{1}{n}a_{n-1}-\frac{n-5}{n(n-1)}a_{n-2}-\frac{2}{n(n-1)}a_{n-3}\quad (n\ge 3)$$

8)
$$y=1+2(x-1)+\frac{e}{2}(x-1)^2+\frac{e-1}{6}(x-1)^3+\frac{e-4}{24}(x-1)^4+\ldots+a_n(x-1)^n+\ldots$$
$$a_n=\frac{e-a_{n-3}(n-2)!}{n!}\quad (n\ge 3)$$

9)
$$y=2-2(x+1)+2(x+1)^2-\frac{2}{3}(x+1)^3+\frac{1}{3}(x+1)^4+\ldots$$
$$a_n=\frac{1}{n}a_{n-1}-\frac{n-5}{n(n-1)}a_{n-2}-\frac{2}{n(n-1)}a_{n-3}\quad (n\ge 3)$$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

פתרון מדר בעזרת טורים – נקודה רגולרית-סינגולרית

שאלות

עבור כל אחת מהמשוואות הבאות הראו שהנקודה היא נקודה סינגולרית רגולרית, ופתרו את המשוואה על ידי פיתוח המשוואה לטור חזקות בסביבות הנקודה.

1) $3x^2y''+2xy'+x^2y=0$

2) $2x^2y''+7x(x+1)y'-3y=0$

3) $2x^2y''-xy'+(x-5)y=0$

4) $3x^2y''-xy'+y=0$

5) $x^2y''+xy'+x^2y=0$

6) $x^2y''-xy'+y=0$

7) $x^2y''+x(x+2)y'-2y=0$

8) $x^2y''+x(x-2)y'+2y=0$

הערות

בשאלות **2-5**, הפתרונות של המשוואה האינדיציאלית שונים והפרשם אינו מספר שלם.
בשאלות **6** ו-**7** הפתרונות שווים, ובשאלות **8** ו-**9** הפתרונות שונים והפרשם מספר שלם.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $$y=k_1x^{1/3}\left(1-\frac{1}{14}x^2+\frac{1}{728}x^4+\dots\right)+k_2\left(1-\frac{1}{10}x^2+\frac{1}{440}x^4+\dots\right)$$

2) $$y=k_1x^{1/2}\left(1-\frac{7}{18}x^1+\frac{147}{792}x^2+\dots\right)+k_2x^{-3}\left(1-\frac{21}{5}x^1+\frac{49}{5}x^2-\frac{343}{15}x^3\right)$$

3) $$y=k_1x^{-1}\left(1+\frac{1}{5}x+\frac{1}{30}x^2+\frac{1}{90}x^3+\dots\right)+k_2x^{2.5}\left(1-\frac{1}{9}x+\frac{1}{198}x^2-\frac{1}{7722}x^3+\dots\right)$$

4) $$y=k_1x+k_2x^{1/3}$$

5) $$y=k_1\left(1-\frac{1}{2^2}x^2+\frac{1}{4^2\cdot 2^2}x^4+\dots\right)+$$
$$+k_2\left[\ln x\cdot\left(1-\frac{1}{2^2}x^2+\frac{1}{4^2\cdot 2^2}x^4+\dots\right)+\left(\frac{2}{2^3}x^2+\frac{-12}{4^3\cdot 2^3}x^4+\dots\right)\right]$$

6) $$y(x)=k_1x+k_2x\ln x$$

7) $$y(x)=\frac{k_1}{x^2}\left(1-x+\frac{1}{2}x^2-e^{-x}\right)+\frac{k_2}{x^2}e^{-x}$$

8) $$y=-a_0x^2\ln x\left(1-x+\frac{1}{2}x^2+\dots\right)+a_0x\left(1-x^2-\frac{3}{4}x^3+\dots\right)$$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

נוסחאות – טורי מקלורן של פונקציות חשובות

טור מקלורן	תחום התכנסות
$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+\frac{x^1}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots$	$-\infty<x<\infty$
$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\dots$	$-\infty<x<\infty$
$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\dots$	$-\infty<x<\infty$
$\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\dots$	$-1<x\le 1$
$\arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\dots$	$-1\le x\le 1$
$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x^1+x^2+x^3+\dots$	$-1<x<1$
$(1+x)^m=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)}{n!}x^n$ $=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\dots$	$-1\le x\le 1\ (m>0)$ $-1<x\le 1\ (-1<m<0)$ $-1<x<1\ (m\le -1)$ $m\ne 0,1,2,3,\dots$

כתב ופתר – גיא סלומון ©