# אלגברה ליניארית א

## פרק 1 - פתרון וחקירת מערכת משוואות ליניאריות

### תוכן העניינים

1. פתרון וחקירת מערכת משוואות ליניאריות ..... 1
2. מערכות עם פרמטר ..... 4

# פתרון וחקירת מערכות של משוואות לינאריות

## שאלות

**1)** מצאו אילו מהמערכות הבאות הן מערכות שקולות:

א. $\begin{matrix} x+10y=11 \\ 2x-2y=0 \end{matrix}$ ב. $\begin{matrix} x-4y=-7 \\ x-y=-1 \end{matrix}$ ג. $\begin{matrix} x-y=0 \\ 2x+y=3 \end{matrix}$ ד. $\begin{matrix} 2x+y=4 \\ x+y=3 \end{matrix}$

**2)** רשמו את המטריצות המתאימות למערכות המשוואות הבאות:

א. $\begin{matrix} x+10y=11 \\ 2x-2=0 \\ x+y=3 \end{matrix}$ ב. $\begin{matrix} x-4y+z=-7 \\ x-y=-1 \\ x+y+z=5 \end{matrix}$ ג. $\begin{matrix} 2x+y+z=3 \\ x-z=0 \end{matrix}$ ד. $\begin{matrix} x=3 \\ 2x+y=4 \\ z+t=8 \end{matrix}$

בשאלות **3-5** בצעו על כל מטריצה את הפעולות הרשומות מתחתיה, בזו אחר זו, ומצאו את המטריצה המתקבלת (סדר הפעולות הוא משמאל לימין ומלמעלה למטה).

**3)** $\begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 5 & 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}$

$R_1 \leftrightarrow R_2, R_1 \to 2R_1$

$R_3 \to R_3 + R_1, R_1 \leftrightarrow R_3$

**4)** $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$R_2 \to 4R_2, R_2 \to R_2 + R_1$

$R_2 \leftrightarrow R_3, R_3 \to R_3 - 3R_2$

**5)** $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 8 & 1 \\ 2 & -3 & 6 & 0 \\ -1 & 4 & -5 & 1 \end{pmatrix}$

$R_1 \to R_1 + 3R_3, R_2 \to R_2 + 3R_3$

$R_1 \to 5R_1 - 8R_2$

**6)** מצאו איזה פעולה אלמנטרית אחת יש לבצע על המטריצה שמשמאל, כדי לקבל את המטריצה מימין:

א. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 6 & -3 & 9 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

ב. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & 17 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

ג. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$

בשאלות **7-10** הביאו את המטריצות הבאות לצורה **מדורגת**
(בשאלות 7, ו-9 – גם לצורה **מדורגת קנונית**):

**7)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & -8 & -1 & 6 & 4 \\ 1 & 4 & -7 & 5 & 2 & 8 \end{pmatrix}$

**8)** $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 & -6 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

**9)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 8 & 4 & 17 \end{pmatrix}$

**10)** $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 11 & -5 & 3 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

בשאלות **11-22** פתרו את מערכות המשוואות בשיטת גאוס (כלומר, על ידי דירוג):

**11)** $\begin{aligned} 2x+3y&=8 \\ 5x-4y&=-3 \end{aligned}$

**12)** $\begin{aligned} 4x+8y&=20 \\ 3x+6y&=15 \end{aligned}$

**13)** $\begin{aligned} 8x-4y&=10 \\ -6x+3y&=1 \end{aligned}$

**14)** $\begin{aligned} 2x_1-x_2-3x_3&=5 \\ 3x_1-2x_2+2x_3&=5 \\ 10x_1-6x_2-2x_3&=32 \end{aligned}$

**15)** $\begin{aligned} x+2y+3z&=-11 \\ 2x+3y-z&=-5 \\ 3x+y-z&=2 \end{aligned}$

**16)** $\begin{aligned} x+2y+3z&=3 \\ 4x+6y+16z&=8 \\ 3x+2y+17z&=1 \end{aligned}$

**17)** $\begin{aligned} x+3y&=2 \\ 2x+y&=-1 \\ x-y&=-2 \end{aligned}$

**18)** $\begin{aligned} 4x-7y&=0 \\ 8x-14y&=2 \\ -16x+28y&=4 \end{aligned}$

**19)** $\begin{aligned} 3x-2y&=1 \\ -9x+6y&=-3 \\ 6x-4y&=2 \end{aligned}$

**20)** $\begin{aligned} x+2y-3z+2t&=2 \\ 2x+5y-8z+6t&=5 \\ 6x+8y-10z+4t&=8 \end{aligned}$

**21)** $\begin{aligned} x_1+5x_2+4x_3-13x_4&=3 \\ 3x_1-x_2+2x_3+5x_4&=2 \\ 2x_1+2x_2+3x_3-4x_4&=0 \end{aligned}$

**22)** $\begin{aligned} x+2y+2z&=2 \\ 3x-2y-z&=5 \\ 2x-5y+3z&=-4 \\ 2x+8y+12z&=0 \end{aligned}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1)** א ו-ג שקולות, ו-ב ו-ד שקולות.

**2)** א. $\begin{pmatrix}1&10&11\\2&-2&0\\1&1&3\end{pmatrix}$ ב. $\begin{pmatrix}1&-4&1&-7\\1&-1&0&-1\\1&1&1&5\end{pmatrix}$ ג. $\begin{pmatrix}2&1&1&3\\1&0&-1&0\end{pmatrix}$

ד. $\begin{pmatrix}1&0&0&0&3\\2&1&0&0&4\\0&0&1&1&8\end{pmatrix}$

**3)** $\begin{pmatrix}9&2&6&10\\3&5&-1&0\\4&2&8&4\end{pmatrix}$ **4)** $\begin{pmatrix}4&1&0&2\\0&3&1&-1\\0&0&1&5\end{pmatrix}$ **5)** $\begin{pmatrix}8&-32&37&-4\\-1&9&-5&3\\-1&4&-5&1\end{pmatrix}$

**6)** א. $R_1\to 2R_1+R_2$ ב. $R_2\to R_2-4R_1$ ג. $R_2\to 2R_2+4R_1$

**7)** $\begin{pmatrix}1&2&-3&-2&4&1\\0&1&-2&3&-2&2\\0&0&0&1&2&3\end{pmatrix}$ ו- $\begin{pmatrix}1&0&1&0&24&21\\0&1&-2&0&-8&-7\\0&0&0&1&2&3\end{pmatrix}$

**8)** $\begin{pmatrix}1&2&-1&2&1\\0&0&3&-6&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$ **9)** $\begin{pmatrix}1&2&-1&3\\0&1&2&2\\0&0&3&4\end{pmatrix}$ ו- $\begin{pmatrix}1&0&0&\frac{17}{3}\\0&1&0&-\frac{2}{3}\\0&0&1&\frac{4}{3}\end{pmatrix}$

**10)** $\begin{pmatrix}1&3&-1&2\\0&11&-5&3\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

**11)** $(x,y)=(1,2)$ **12)** $(x,y)=(5-2t,t)$ **13)** $\phi$

**14)** $\phi$ **15)** $(x_1,x_2,x_3)=(1,-3,-2)$

**16)** $(x,y,z)=(-1-7t,2+2t,t)$ **17)** $(x,y)=(-1,1)$

**18)** $\phi$ **19)** $(x,y)=\left(\frac{1+2t}{3},t\right)$

**20)** $(x,y,z,t)=(-a+2b,1+2a-2b,a,b)$ **21)** $\phi$

**22)** $(x,y,z)=(2,1,-1)$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# מערכות עם פרמטר

## שאלות

בשאלות **1-6** מצאו לאילו ערכי $k$ (אם יש כאלה) יש למערכות:
1. פתרון יחיד. 2. אף פתרון. 3. אינסוף פתרונות.

**1)**
$$\begin{aligned} x-y+z&=1\\ 5x-7y+(k^2+3)z&=k^2+1\\ 3x-y+(k+3)z&=3 \end{aligned}$$

**2)**
$$\begin{aligned} x+ky+z&=1\\ x+y+kz&=1\\ kx+y+z&=1 \end{aligned}$$

**3)**
$$\begin{aligned} x+2ky+z&=0\\ 3x+y+kz&=2\\ x+9ky+5z&=-2 \end{aligned}$$

**4)**
$$\begin{aligned} 2x-y+z&=0\\ x+2y-z&=0\\ 5x+(1-k)y+k^2z&=1 \end{aligned}$$

**5)**
$$\begin{aligned} kx-y&=1\\ (k-2)x+ky&=-2\\ (k^2-1)z&=9 \end{aligned}$$

**6)**
$$\begin{aligned} x+ky+3z&=2\\ kx-y+z&=4\\ 3x+y+(2+k)z&=0 \end{aligned}$$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

בשאלות **7-8** מצאו לאילו ערכי $k$ (אם יש כאלה) יש למערכות:
1. פתרון יחיד. 2. אף פתרון. 3. אינסוף פתרונות.

**7)**
$$\begin{aligned} 2x+ky&=3\\ (k+3)x+2y&=k^2+5\\ 6x+3ky&=7k^2+2 \end{aligned}$$

**8)**
$$\begin{aligned} 2x-3y+z&=1\\ 4x+(k^2-5k)y+2z&=k \end{aligned}$$

**9)** נתונה המערכת: $\begin{cases} x+y-z=1\\ 3x-7y+(k^2+1)z=k^2-1\\ 4x-6y+(k+2)z=4 \end{cases}$.

א. רשמו את המטריצה המתאימה למערכת המשוואות.

ב. רשמו את הצורה המדורגת של המטריצה מסעיף א.

ג. מצאו לאילו ערכי $k$ יש למערכת:
1. פתרון יחיד. 2. אף פתרון. 3. אינסוף פתרונות.

ד. רשמו את הפתרון הכללי במקרה בו יש אינסוף פתרונות.

ה. מצאו לאילו ערכי $k$ יש למערכת פתרון שבו $z=0$.

ו. מצאו לאילו ערכי $k$ יש למערכת פתרון יחיד שבו $z=0$.

ז. מצאו עבור איזה ערך של $k$ פתרון של המשוואה השלישית הוא $(1,2,3)$.
האם ייתכן שהפתרון הנ"ל הוא גם פתרון של כל המערכת? הסבירו.

ח. מצאו לאיזה ערך של $k$, $(1,0,0)$ הוא הפתרון היחיד של המערכת.

## תשובות סופיות

**1)** 1. $k\neq 1,\ k\neq -2$ 2. $k=1$ 3. $k=-2$

**2)** 1. $k\neq 1,\ k\neq -2$ 2. $k=-2$ 3. $k=1$

**3)** 1. $k\neq -1,\ k\neq \frac{4}{7}$ 2. $k=\frac{4}{7}$ 3. $k=-1$

**4)** 1. $k\neq 1,\ k\neq -0.4$ 2. $k=1,\ k=-0.4$

**5)** 1. $k\neq \pm 1,\ k\neq -2$ 2. $k=\pm 1, k=-2$

**6)** 1. $k\neq -1,\ k\neq -3,\ k\neq 2$ 3. $k=-1,\ k=-3,\ k=2$

**7)** 1. $k=-1$ 2. $k\neq \pm 1$ 3. $k=1$

**8)** 2. $k=3$ 3. $k\neq 3$

**9)** א. $\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 1\\ 3 & -7 & k^2+1 & k^2-1\\ 4 & -6 & k+2 & 4\end{pmatrix}$ ב. $\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & -10 & k^2+4 & k^2-4\\ 0 & 0 & -k^2+k+2 & 4-k^2\end{pmatrix}$

ג. 1. $k\neq -1,\ k\neq 2$ . 2. $k=-1$ 3. $k=2$ ד. $(x,y,z)=(1+0.2t,0.8t,t)$

ה. $k=\pm 2$ ו. $k=-2$ ז. $k=2$ , לא. ח. $k=-2$


כתב ופתר – גיא סלומון ©