

סטטיסטיקה א

פרק 16 - פועלות בין מאורעות (חיתוך ואיחוד) - מאורעות זרים ומכלולים

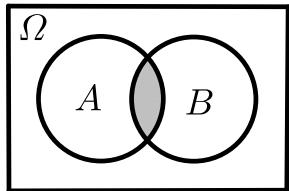
תוכן העניינים

1. כללי

פעולות בין מאורעות (חיתוך ואיחוד) – מאורעות זרים ומכילים:

רעיון:

פעולה חיתוך:

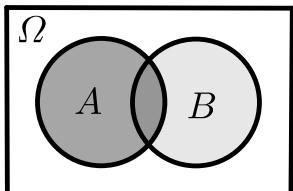


נותנת את המשותף בין המאורעות הנחוצים.

חיתוך בין המאירוע A למאירוע B יסומן כך: $A \cap B$.
מדובר בתוצאות שנמצאות ב- A וגם ב- B .

דוגמה :

. $A = \{5, 6\}$ בהטלה קובייה, למשל, האפשרויות לקבל לפחות 5 הן : .
האפשרויות לקבל תוצאה זוגית הן : .
 $A \cap B = \{6\}$ היחסוך שביניהם הוא :



נותנת את כל האפשרויות שנמצאות לפחות באחת מהמאורעות, ומסומנת:

$A \cup B$. הפעולה נותנת את אשר נמצא ב- A או B .

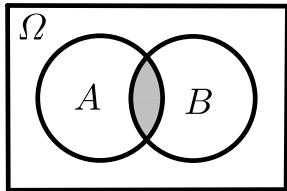
כלומר, לפחות אחד מהמאורעות קורה.

פעולה איחוד:

דוגמה :
בהטלה קובייה האפשרויות לקבל לפחות 5 הן : $A = \{5, 6\}$
האפשרויות לקבל תוצאה זוגית : $B = \{2, 4, 6\}$
האפשרויות לקבל לפחות 5 וגם תוצאה זוגית : $A \cup B = \{2, 4, 5, 6\}$

דוגמה (הפתרון נמצא בהקלטה):
סטודנטים ניגש בסմיסטר לשני מבחנים. מבחן בסטטיסטיקה ו מבחן בכלכלת. ההסתברות
שלו לעבור את המבחן בסטטיסטיקה הוא 0.9, ההסתברות שלו לעבור את המבחן
בכלכלת הוא 0.8 וההסתברות לעבור את המבחן בסטטיסטיקה ובכלכלת היא 0.75.
מה ההסתברות שלו לעבור את המבחן בסטטיסטיקה בלבד?
מה ההסתברות שלו להיכשל בשני המבחנים?
מה ההסתברות לעבור לפחות מבחן אחד?

נוסחת החיבור לשני מאורעות:



ההסתברות של איחוד מאורעות תחושב ע"י הקשר הבא :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

חוקי דה מורגן לשני מאורעות:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

$$P(A \cap B) = 1 - P(\overline{A} \cup \overline{B})$$

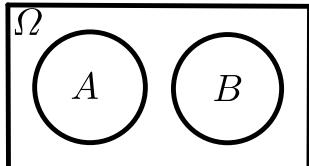
$$P(A \cup B) = 1 - P(\overline{A} \cap \overline{B})$$

שיטת ריבוע הקסם:

השיטה רלבנטית רק אם יש שני מאורעות במקביל בדומה לתרגיל הקודם :

	\bar{A}	A	
B	$P(\bar{A} \cap B)$	$P(A \cap B)$	$P(B)$
\bar{B}	$P(\bar{A} \cap \bar{B})$	$P(A \cap \bar{B})$	$P(\bar{B})$
	$P(\bar{A})$	$P(A)$	1

מאורעות זרים:



מאורעות זרים הם כאשר אין להם אף איבר משותף : $A \cap B = \emptyset$. כמובן, הם לא יכולים להתרחש בו זמינית.

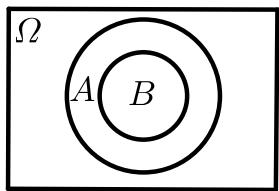
ההסתברות של חיתוך המאורעות היא אפס : $P(A \cap B) = 0$.

ההסתברות של איחוד המאורעות תחושב :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

דוגמה :

בהתלט קובייה, האפשרויות לקבל לפחות 5 הן : $A = \{5, 6\}$ והאפשרות לקבל 3 היא : $B = \{3\}$, ולכן החיתוך ביניהם הוא אפס, כמובן : $A \cap B = \emptyset$.

מאורעות מוכליים:

נתונים שני מאורעות A ו- B , השונים מאפס.
נאמר שהמאורע B מוכל במאורע A אם כל איברי המאורע B כלולים במאורע A ונרשום: $B \subset A$.
מאורע A מכיל את מאורע B כל התוצאות שנמצאות ב- B מוכלות בתחום מאורע A .

קשר זה מסומן באופן הבא : $B \subset A$

$$A \cap B = B \quad P(A \cap B) = P(B)$$

$$A \cup B = A \quad P(A \cup B) = P(A)$$

למשל:
 $A = \{2, 4, 6\}$
 $B = \{2, 4\}$

שאלות:

- 1)** מהאותיות E , F ו- G יוצרים מילה בת 2 אותיות – לא בהכרח בת משמעות. נגידר את המאורעות הבאים :
 A - במילה נמצאת האות E .
 B - במילה אותיות שונות.
 א. רשמו את כל האפשרויות לחיתוך A עם B .
 ב. רשמו את כל האפשרויות לאיחוד של A עם B .
- 2)** תלמיד ניגש בסמסטר לשני מבחנים מבחן בכלכלה ו מבחן בסטטיסטיקה. נגידר את המאורעות הבאים :
 A - עברו את המבחן בסטטיסטיקה.
 B - עברו את המבחן בכלכלה.
 היעזרו בפעולות חיתוך, איחוד ומשלים בלבד כדי להגידר את המאורעות הבאים וסמננו בדיאגרמת ווון את השטח המתאים :
 א. התלמיד עבר רק את המבחן בכלכלה.
 ב. התלמיד עבר רק את המבחן בסטטיסטיקה.
 ג. התלמיד עבר את שני המבחנים.
 ד. התלמיד עבר לפחות מבחן אחד.
 ה. התלמיד נכשל בשני המבחנים.
 ו. התלמיד נכשל בכלכללה.
- 3)** נתבקשתם לבחור ספרה באקראי. נגידר את A להיות הספרה שנבחרה היא זוגית. נגידר את B להיות הספרה שנבחרה קטנה מ-5.
 א. רשמו את כל התוצאות למאורעות הבאים :
 $A \cup B$, $A \cap B$, \bar{B} , B , A
 ב. חשבו את ההסתברויות לכל המאורעות מהסעיף הקודם.
- 4)** נסמן ב- Ω את מרחב המדגמים וב- ϕ קבוצה ריקה.
 נתון כי A הינו מאורע בתוך מרחב המדגמים.
 להלן מוגדרים מאורעות שפטرونום הוא Ω או ϕ או A .
 קבעו עבור כל מאורע מה הפתרון שלו :
 $A \cup \bar{A}$, $\bar{\phi}$, $A \cap \bar{A}$, $A \cup \Omega$, $A \cap \Omega$, $A \cup \phi$, $A \cap \phi$, \bar{A}

5) הוגדרו המאורעות הבאים:

A - אדם שגובהו מעל 1.7 מטר

B - אדם שגובהו מתחת ל-1.8 מטר.

קבעו את גובהם של האנשים הבאים:

. A \cap B

. A \cup B

. $\bar{A} \cap B$

. $\bar{A} \cup \bar{B}$

. $\bar{A} =$

6) נגדיר את המאורעות הבאים:

A - אדם דובר עברית.

B - אדם דובר ערבית.

C - אדם דובר אנגלית.

השתמשו בפעולות איחוד, חיתוך והשלמה לתיאור המאורעות הבאים:

א. אדם דובר את כל שלוש השפות.

ב. אדם דובר רק עברית.

ג. אדם דובר לפחות שפה אחת מתוך השפות הללו.

ד. אדם אינו דובר אנגלית.

ה. קבוצת התלמידים שדוברים שתי שפות במדויק (מהשפות הנ"ל).

7) שני מפלגות רצות לכינסת הבאה. מפלגת "גדר" תעבור את אחוז החסימה בהסתברות של 0.08 ומפלגת "עתיד" תעבור את אחוז החסימה בהסתברות של 0.20. בהסתברות של 76% שני המפלגות לא תעבורנה את אחוז החסימה.

א. מה ההסתברות שלפחות אחת מהמפלגות תעבור את אחוז החסימה?

ב. מה ההסתברות שתשתי המפלגות תעבורנה את אחוז החסימה?

ג. מה ההסתברות שרק מפלגת "עתיד" תעבור את אחוז החסימה?

8) במקום העבודה מסויים 40% מהעובדים הם גברים. כמו כן, 20% מהעובדים הם אקדמיים. 10% מהעובדים הין נשים אקדמיות.

א. איזה אחוז מהעובדים הם גברים אקדמיים?

ב. איזה אחוז מהעובדים הם גברים או אקדמיים?

ג. איזה אחוז מהעובדים הם נשים לא אקדמיות?

9) הסיכוי של מניה A לעלות הנו 0.5 ביום מסוים והסיכוי של מניה B לעלות ביום מסוים הנו 0.4. בסיכוי של 0.7 לפחות אחת מהמניות עלתה ביום מסוים.

חשבו את ההסתברויות הבאות לגבי שתי המניות הללו ביום מסוים :

א. שתי המניות עלנה.

ב. שאף אחת מהמניות לא עלנה.

ג. שמניה A בלבד עלה.

10) מטילים זוג קופיות, אדומה ושחורה. נגידר את המאורעות הבאים :

A - בקובייה האדומה התקבלה התוצאה 4 ובשחורה 2.

B - סכום התוצאות משתי הקופיות הוא 6.

C - מכפלת התוצאות בשתי הקופיות היא 10.

א. האם A ו- B מאורעות זרים?

ב. האם המאורע B מכיל את המאורע A?

ג. האם A ו- C מאורעות זרים?

ד. האם A ו- C מאורעות משלימים?

11) עבר המאורע A ו- B ידועות ההסתברויות הבאות : $P(A)=0.6$

$$P(\bar{A} \cap \bar{B})=0.1, P(B)=0.3$$

א. האם A ו- B מאורעות זרים?

$$P(\bar{A} \cap B).$$

12) מטבח הווטל פעמיים. נגידר את המאורעות הבאים :

A - קיבלנו עץ בהטלה הראשונה.

B - קיבלנו לפחות עץ אחד בשתי ההטלות.

איזו טענה נכונה?

א. A ו- B מאורעות זרים.

ב. A ו- B מאורעות משלימים.

ג. B מכיל את A.

ד. A מכיל את B.

13) בהגרלה חולקו 100 כרטיסים. על 3 מהם רשום חופשה ועל 2 מהם רשום מחשב שאר הkartiyim ריקים. אדם קיבל כרטיס אקראי.

א. מה הסיכוי לזכות בחופשה או במחשב? האם המאורעות הללו זרים?

ב. מה ההסתברות לא לזכות בפרס?

14) נתון כי: $P(A) = 0.3$, $P(B) = 0.25$, $P(A \cup B) = 0.49$

א. חשבו את הסיכוי ל- $P(A \cap B)$.

ב. האם A ו- B מאורעות זרים?

ג. מה ההסתברות שرك A יקרה או שرك B יקרה?

15) A ו- B מאורעות זרים. נתון ש: $2 \cdot P(B \cap \bar{A}) = P(A \cap \bar{B}) = P(\bar{A} \cap \bar{B})$

מה הסיכוי למאורע A ומה ההסתברות למאורע B ?

16) קבעו אילו מהטענות הבאות נכונות:

א. $A \cap B = B \cap A$

ב. $\overline{A \cup B} = A \cap \bar{B}$

ג. $A \cap B \cap C = A \cap B \cap (C \cup B)$

ד. $\overline{A \cap B \cap C} = \bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}$

17) נתון ש- A ו- B מאורעות במרחב מדגם. נתון ש- $P(A) = 0.3$, $P(B) = 0.2$

א. האם ניתן ש- $P(A \cup B) = 0.4$?

ב. האם ניתן ש- $P(A \cup B) = 0.6$?

ג. אם A ו- B זרים מה הסיכוי ? $P(A \cup B)$

ד. אם A מכיל את B מה הסיכוי ? $P(A \cup B)$?

18) מתוך אזרחי המדינה הבוגרים ל-30% חשבו בבנק הפלטלים. ל-28% חשבו בבנק לאומי ול-15% חשבו בבנק מזרחי. כמו כן נתון כי 6% מחזיקים חשבו בבנק לאומי ובבנק הפלטלים. ל-5% חשבו בבנק פועלים ומזרחי. ול-4% חשבו בבנק לאומי ומזרחי. כמו כן ל-1% מהאוכלוסייה הבוגרת חשבו בנק בשלושת הבנקים יחד.

א. מה אחוז האזרחים להם חשבו בבנק לאומי בלבד?

ב. מה ההסתברות שאזרח כלשהו ייחס חשבו בבנק פועלים ולאומי אבל לא בבנק מזרחי?

ג. מה ההסתברות שלאזרח יהיה חשבו בפועלים או במזרחי אבל לא בנק לאומי?

ד. מה אחוז האזרחים שיש להם חשבו בנק אחד בלבד?

ה. מה אחוז האזרחים שיש להם בדיקן חשבו בשני בנקים בלבד?

ו. מה ההסתברות שלאזרח בגור אין חשבו בנק אף אחד מהבנקים הללו?

ז. לאייה אחוז מהازרים יש חשבו בנק לפחות אחד מהבנקים הללו?

19) חברת מסויימת פרסמה את הנתונים הבאים לגבי האזרחים מעל גיל 21. הנתונים שהתקבלו היו : 40% מהאנשים מחזיקים כרטיס "ויזה", 52% מחזיקים כרטיס "ישראל", 20% מחזיקים כרטיס "אמריקן אקספרס", 15% מחזיקים כרטיס ויזה וגם ישראל, 8% מחזיקים כרטיס ישראל ועם אמריקן אקספרס ו- 7% מחזיקים כרטיס ויזה וגם אמריקן אקספרס. כמו כן, 13% לא מחזיקים באף אחד משלושת הcredיטיסים הנ"ל.

א. מה אחוז מחזיקי שלושת כרטיס האשראי גם יחד?

ב. מה אחוז מחזיקי ישראל וויזה אך לא את אמריקן אקספרס?

ג. מה אחוז מחזיקי כרטיס אחד בלבד?

$$\cdot P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)$$

20) הוכיחו : $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)$

21) A ו- B מאורעות במרחב המדגם. האם נכון לומר שהסיכוי שיתרחש בדיאוק מאורע אחד הוא :

$$P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$$

תשובות סופיות:

$$\text{א. } A \cap B = \{EG, EF, FE, GE\} \quad (1)$$

$$\text{ב. } A \cup B = \{EG, EF, EE, FE, GE, EG, GF\}$$

$$\text{ג. } \bar{B} \quad \text{ד. } \bar{A} \cap \bar{B} \quad \text{ה. } A \cup B \quad \text{ט. } A \cap B \quad \text{ו. } A \cap \bar{B} \quad \text{ז. } B \cap \bar{A} \quad \text{א. } \bar{A} \quad (2)$$

$$\text{, } \bar{B} = 5, 6, 7, 8, 9 \quad , B = 0, 1, 2, 3, 4 \quad , A = 0, 2, 4, 6, 8 \quad \text{א. } (3)$$

$$\text{. } A \cup B = 0, 2, 4, 6, 8, 1, 3 \quad , A \cap B = 0, 2, 4$$

$$\text{ב. } P(A \cup B) = 0.7, P(A \cap B) = 0.3, P(\bar{B}) = 0.5, P(B) = 0.5, P(A) = 0.5$$

$$\text{, } A \cup \Omega = \Omega \quad , A \cap \Omega = A \quad , A \cup \phi = A \quad , A \cap \phi = \phi \quad , \bar{\bar{A}} = A \quad (4)$$

$$\text{. } A \cup \bar{A} = \Omega \quad , \bar{\phi} = \Omega \quad , A \cap \bar{A} = \phi$$

$$\text{ב. } A \cup B : \text{ כל גובה אפשרי} \quad \text{א. } \text{גובה בין } 1.7 \text{ ל- } 1.8 \quad . A \cap B : (5)$$

$$\text{ט. } \bar{A} \cup \bar{B} \quad \text{ג. } \text{גובה לכל היוטר } 1.7 \text{ או לפחות } 1.8.$$

$$\text{ה. } A = \bar{\bar{A}} : \text{ גובה מעל } 1.7$$

$$\text{. } A \cup B \cup C \quad \text{ג. } \text{. } A \cap \bar{B} \cap \bar{C} \quad \text{ב. } \text{. } A \cap B \cap C \quad \text{א. } \bar{C} \quad (6)$$

$$\text{. } (A \cap B \cap \bar{C}) \cup (B \cap C \cap \bar{A}) \cup (A \cap C \cap \bar{B}) \quad \text{ה. } \text{. } \bar{C} \quad \text{ט. }$$

$$\text{ג. } P(B \cap \bar{A}) = 0.16 \quad \text{ב. } P(A \cap B) = 0.04 \quad \text{א. } P(A \cup B) = 0.24 \quad (7)$$

$$\text{ג. } P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 50\% \quad \text{ב. } P(A \cup B) = 50\% \quad \text{א. } P(A \cap B) = 10\% \quad (8)$$

$$\text{ג. } P(A \cup \bar{B}) = 0.3 \quad \text{ב. } P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0.3 \quad \text{א. } P(A \cap B) = 0.2 \quad (9)$$

$$\text{ד. לא. } \quad \text{ג. כן. } \quad \text{ב. כן. } \quad \text{א. לא.} \quad (10)$$

$$\text{. } P(\bar{A} \cap B) = 0.3 \quad \text{ב. כן. } \quad \text{א. כן.} \quad (11)$$

(12) הטענה הנכונה היא ג'.

$$\text{. } 0.95 \quad \text{ב. } 0.05 \quad \text{א. } (13)$$

$$\text{. } P((A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A})) = 0.43 \quad \text{ג. לא. } \quad \text{ב. לא. } \quad \text{א. } P(A \cap B) = 0.06 \quad (14)$$

$$\text{. } P(B) = \frac{1}{5}, P(A) = \frac{2}{5} \quad (15)$$

$$\text{ג. לא נכון. } \quad \text{ב. לא נכון. } \quad \text{א. נכון. } \quad (16)$$

$$\text{ט. } P(A \cup B) = 0.3 \quad \text{ט. } P(A \cup B) = 0.5 \quad \text{ג. לא. } \quad \text{ב. לא. } \quad \text{א. כן.} \quad (17)$$

$$\text{ו. } 0.41 \quad \text{ה. } 12\% \quad \text{ט. } 46\% \quad \text{ג. } 0.31 \quad \text{ב. } 0.05 \quad \text{א. } 19\% \quad (18)$$

$$\text{ז. } 59\%$$

$$\text{ג. } 67\% \quad \text{ב. } 10\% \quad \text{א. } 5\% \quad (19)$$

(20) שאלת הוכחה.

(21) נכון.