

מתמטיקה ללמידת מכונה

פרק 4 - פירוקים של מטריצה (פירוק LU, פירוק SVD, פירוק QR)

תוכן העניינים

1. פירוק LU.....1
2. פירוק SVD.....2
3. פירוק QR.....6

פירוק LU

שאלות

(1) רשמו את פירוק LU של המטריצה $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & -4 & -2 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix}$

(2) רשמו את פירוק LU של המטריצה $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 2 & 3 & -8 & 5 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 8 & -1 & 13 \end{pmatrix}$

(3) רשמו את פירוק LU של המטריצה $A = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 6 \\ -4 & 5 & -7 \\ 3 & 5 & -1 \\ -6 & 4 & -8 \\ 8 & -3 & 9 \end{pmatrix}$

תשובות סופיות

(1) $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & -4 & -2 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix}}_A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_L \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_U$

(2) $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 2 & 3 & -8 & 5 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 8 & -1 & 13 \end{pmatrix}}_A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_L \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}_U$

(3) $\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -6 & 6 \\ -4 & 5 & -7 \\ 3 & 5 & -1 \\ -6 & 4 & -8 \\ 8 & -3 & 9 \end{pmatrix}}_A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_L \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -6 & 6 \\ 0 & -7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_U$

פירוק SVD

שאלות

(1) נתונה המטריצה $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$

מצאו את הערכים הסינגולריים ואת הווקטורים הסינגולריים השמאליים והימניים של המטריצה.

(2) נתונה המטריצה $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

מצאו את הערכים הסינגולריים ואת הווקטורים הסינגולריים הימניים של המטריצה.

(3) נתונה המטריצה $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

מצאו את הערכים הסינגולריים ואת הווקטורים הסינגולריים השמאליים של המטריצה.

(4) נתונה המטריצה $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \sqrt{2} & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

מצאו את הערכים הסינגולריים ואת הווקטורים הסינגולריים השמאליים של המטריצה.

(5) נתונה המטריצה $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$

מצאו את הערכים הסינגולריים ואת הווקטורים הסינגולריים השמאליים של המטריצה.

(6) נתונה המטריצה $A = \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{bmatrix}$

מצאו את הערכים הסינגולריים ואת הווקטורים הסינגולריים השמאליים של המטריצה.

7 מצאו פירוק SVD של המטריצה $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

8 מצאו פירוק SVD של המטריצה $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

9 מצאו פירוק SVD של המטריצה $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \sqrt{2} & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

10 מצאו פירוק SVD של המטריצה $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$

11 מצאו פירוק SVD של המטריצה $A = \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{bmatrix}$

תשובות סופיות

$$\sigma_1 = 5, \sigma_2 = 3 ; u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} ; v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \frac{1}{\sqrt{18}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}, v_3 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\sigma_1 = \sqrt{3}, \sigma_2 = 1 ; v_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$\sigma_1 = \sqrt{3}, \sigma_2 = 1 ; u_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, u_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$\sigma_1 = \sqrt{8}, \sigma_2 = \sqrt{2} ; u_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, u_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, u_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\sigma_1 = 3, \sigma_2 = 2 ; u_1 = \frac{1}{\sqrt{1.25}} \begin{bmatrix} -0.5 \\ 1 \end{bmatrix}, u_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\sigma_1 = 2 ; u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}, u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \sqrt{2} & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{8} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{6} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-i}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}i & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}i & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad (11)$$

פירוק QR

שאלות

בשאלות 1-4 הפעילו את תהליך גרס-שמידט על הקבוצה הנתונה, נרמלו את קבוצת הווקטורים שהתקבלה לאחר התהליך וסמנו קבוצה זו ב- W .

$$U = \{u_1 = (1, 1, 0), u_2 = (0, 1, 1), u_3 = (1, 0, 1)\} \quad (1)$$

$$U = \{u_1 = (1, 0, 1), u_2 = (2, 1, 0), u_3 = (0, 1, 1)\} \quad (2)$$

$$U = \{u_1 = (1, 3), u_2 = (2, 4)\} \quad (3)$$

$$U = \{u_1 = (2, 2, 2, 2), u_2 = (1, 1, 2, 4), u_3 = (1, 2, -4, -3)\} \quad (4)$$

בשאלות 5-7:

- א. הפעילו את תהליך גרס-שמידט על הקבוצה הנתונה, נרמלו את קבוצת הווקטורים שהתקבלה לאחר התהליך, וסמנו קבוצה זו ב- W .
- ב. השלימו את הקבוצה W מסעיף א' לקבוצה אורתונורמלית של 3 וקטורים.

$$U = \{u_1 = (1, 1, 1), u_2 = (2, 2, 2), u_3 = (2, 3, 4)\} \quad (5)$$

$$U = \{u_1 = (1, 2, 3), u_2 = (4, 5, 6), u_3 = (7, 8, 9)\} \quad (6)$$

$$U = \{u_1 = (1, 1, 1), u_2 = (2, 2, 2), u_3 = (3, 3, 3)\} \quad (7)$$

- א. הפעילו את גרס-שמידט על הקבוצה $U = \{u_1 = (2, 3), u_2 = (4, 6)\}$, נרמלו את קבוצת הווקטורים שהתקבלה לאחר התהליך, וסמנו קבוצה זו ב- W .
- ב. השלימו את הקבוצה W מסעיף א' לקבוצה אורתונורמלית של 2 וקטורים.

- א. הפעילו את גרס-שמידט על הקבוצה
- $$U = \{u_1 = (1, 1, 0), u_2 = (0, 1, 1), u_3 = (1, 2, 1), u_4 = (1, 3, 2)\}$$
- נרמלו את קבוצת הווקטורים שהתקבלה לאחר התהליך, וסמנו קבוצה זו ב- W .
- ב. השלימו את הקבוצה W מסעיף א' לקבוצה אורתונורמלית של 2 וקטורים.

10 הפעילו את תהליך גרס-שמידט על הקבוצה :

$$.U = \{u_1 = (1-i, 1+i), u_2 = (1+2i, 1-2i)\}$$

נרמלו את קבוצת הווקטורים שהתקבלה לאחר התהליך וסמנו קבוצה זו ב- W .
הערה: תרגיל זה מיועד רק למי שלמד מספרים מרוכבים.

11 א. מצאו פירוק QR למטריצה: $.A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

ב. בעזרת הפירוק מסעיף א' פתרו את המערכת: $\begin{cases} x+2y=3 \\ y+z=-1 \\ x+z=-1 \end{cases}$

12 מצאו פירוק QR ל- $.A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

13 מצאו פירוק QR ל- $.A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \\ 2 & 4 & -3 \end{bmatrix}$

14 מצאו פירוק QR ל- $.A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$

15 מצאו פירוק QR ל- $.A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

16 מצאו פירוק QR ל- $.A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

17 מצאו פירוק QR ל- $.A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{18) מצאו פירוק QR ל-}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1-i & 1+2i \\ 1+i & 1-2i \end{bmatrix} \quad \text{19) מצאו פירוק QR ל-}$$

הערה: תרגיל זה מיועד רק למי שלמד על מטריצות אוניטריות.

תשובות סופיות

$$W = \left\{ \hat{w}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0), \hat{w}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 1, 2), \hat{w}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1) \right\} \quad \text{א} \quad (1)$$

$$W = \left\{ \hat{w}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1), \hat{w}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, -1), \hat{w}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 2, 1) \right\} \quad \text{ב} \quad (2)$$

$$W = \left\{ \hat{w}_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}(1, 3), \hat{w}_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}(3, -1) \right\} \quad \text{א} \quad (3)$$

$$W = \left\{ \hat{w}_1 = \frac{1}{4}(2, 2, 2, 2), \hat{w}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, -1, 0, 2), \hat{w}_3 = \frac{1}{5\sqrt{2}}(1, 3, -6, 2) \right\} \quad \text{ב} \quad (4)$$

$$W = \left\{ \hat{w}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1), \hat{w}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1) \right\} \quad \text{א} \quad (5)$$

$$\left\{ \hat{w}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1), \hat{w}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1), \hat{w}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, 1) \right\} \quad \text{ב} \quad (5)$$

$$W = \left\{ \hat{w}_1 = \frac{1}{\sqrt{14}}(1, 2, 3), \hat{w}_2 = \frac{1}{\sqrt{21}}(4, 1, -2) \right\} \quad \text{א} \quad (6)$$

$$\left\{ \hat{w}_1 = \frac{1}{\sqrt{14}}(1, 2, 3), \hat{w}_2 = \frac{1}{\sqrt{21}}(4, 1, -2), \hat{w}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, 1) \right\} \quad \text{ב} \quad (6)$$

$$W = \left\{ \hat{w}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1) \right\} \quad \text{א} \quad (7)$$

$$\left\{ \hat{w}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1), \hat{w}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1), \hat{w}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, 1) \right\} \quad \text{ב} \quad (7)$$

$$\left\{ \hat{w}_1 = \frac{1}{\sqrt{13}}(2, 3), \hat{w}_2 = \frac{1}{\sqrt{13}}(-3, 2) \right\} \quad \text{ב} \quad W = \left\{ \hat{w}_1 = \frac{1}{\sqrt{13}}(2, 3) \right\} \quad \text{א} \quad (8)$$

$$W = \left\{ \hat{w}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0), \hat{w}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 1, 2) \right\} \quad \text{א} \quad (9)$$

$$\left\{ \hat{w}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0), \hat{w}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 1, 2), \hat{w}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1) \right\} \quad \text{ב} \quad (9)$$

$$W = \left\{ \hat{w}_1 = \frac{1}{2}(1-i, 1+i), \frac{1}{2}(1+i, 1-i) \right\} \quad \text{א} \quad (10)$$

$$(x, y, z) = (1, 1, -2) \quad \text{ב} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \sqrt{\frac{2}{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} \end{bmatrix} \quad \text{א} \quad (11)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{-1}{\sqrt{10}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{10} & \frac{14}{\sqrt{10}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{10}} \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \\ 2 & 4 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{50}} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{3}{\sqrt{50}} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{-6}{\sqrt{50}} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{50}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 4 & -2 \\ 0 & \sqrt{6} & \frac{-9}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 & \frac{5}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{14}} & \frac{4}{\sqrt{21}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{14}} & \frac{1}{\sqrt{21}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ \frac{3}{\sqrt{14}} & \frac{-2}{\sqrt{21}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{14}{\sqrt{14}} & \frac{32}{\sqrt{14}} & \frac{50}{\sqrt{14}} \\ 0 & \frac{9}{\sqrt{21}} & \frac{18}{\sqrt{21}} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{3}} & \frac{6}{\sqrt{3}} & \frac{9}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-3}{7\sqrt{2}} & \frac{-8}{7\sqrt{13}} & \frac{2}{\sqrt{13}} \\ 0 & \frac{4}{7\sqrt{2}} & \frac{-22}{7\sqrt{13}} & \frac{-1}{\sqrt{13}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{3}{7\sqrt{2}} & \frac{8}{7\sqrt{13}} & \frac{-2}{\sqrt{13}} \\ 0 & \frac{8}{7\sqrt{2}} & \frac{5}{7\sqrt{13}} & \frac{2}{\sqrt{13}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \frac{3}{\sqrt{2}} & \frac{5}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{7}{\sqrt{2}} & \frac{7}{\sqrt{2}} & \frac{11}{7\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{13}}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{13}} & \frac{-3}{\sqrt{13}} \\ \frac{3}{\sqrt{13}} & \frac{2}{\sqrt{13}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{13} & 2\sqrt{13} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{3}{\sqrt{2}} & \frac{4}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{3}{\sqrt{6}} & \frac{3}{\sqrt{6}} & \sqrt{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$\begin{bmatrix} 1-i & 1+2i \\ 1+i & 1-2i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i & \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i & \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad (19)$$