פיסיקה 3

פרק 9 - פורמליזים אלגברי לתורת הקוונטים

תוכן העניינים

ייצוג באמצעות אלגברה ליניארית:

סיכום כללי:

פונקציות הגל מקיימות את התנאים של מרחב וקטורי.

הכללות:

1. נעבוד עם וקטורים ביותר משלושה מימדים.
2. נעבוד עם סקלרים שיכולים להיות גם מספרים מורכבים.

כתיב דיראק:

:ket
$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ . \\ . \end{pmatrix}$$

:bra
$$\langle\psi| = (\alpha_1^*, \alpha_2^*, \alpha_3^*, ..)$$

מכפלה פנימית - הכללה של מכפלה סקלרית ליותר מ-3 מימדים.

תכונות המכפלה הפנימית:

תכונה 1: $\langle v|u\rangle = \langle u|v\rangle^*$ = סקלר

תכונה 2: $\langle v|v\rangle \geq 0$ ממשי, אם $\langle v|v\rangle = 0$ אז $|v\rangle = |0\rangle$

תכונה 3: $< v|(\alpha|u > +\beta|k >) = \alpha\langle v|u\rangle + \beta\langle v|k\rangle$

הגדרת המכפלה הפנימית בפונקציות הגל:

$$\langle\psi_1|\psi_2\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_1^*\psi_2 \, dx$$

נורמה – הכללה של גודל של וקטור ליותר מ-3 מימדים.

$$\|v\| = \sqrt{\langle v|v\rangle}$$

אם המכפלה הפנימית של שני וקטורים מתאפסת אז אומרים שהוקטורים **אורתוגונליים**.

מרחב L_2 (או L^2) – מכיל את כל הפונקציות שהאינטגרל על גודל הפונקציה בריבוע אינו מתבדר: $\int_{-\infty}^{\infty} \left| f(x) \right|^2 dx < \infty$.

בפיזיקה, מרחב פונקציות הגל שנעבוד איתו נקרא מרחב הילברט ובפועל הוא יהיה המרחב L_2.

* הפונקציות העצמיות של התנע והמיקום אינם ב- L_2 אבל עדיין עובדים איתם.

ייצוג באמצעות בסיס:

בסיס – סט של וקטורים (בלתי תלויים) שבאמצעותם ניתן לבטא כל וקטור אחר במרחב.

בסיס אורתוגונאלי – בסיס שבו כל הוקטורים אורתוגונליים.

בסיס אורתונורמאלי – בסיס אורתוגונאלי שבו הנורמה של כל וקטור היא 1.

הבסיס הסטנדרטי – בסיס שמורכב מוקטורי יחידה.

סט הפונקציות העצמיות (או הו"ע) של כל אופרטור מהוות בסיס*

* יש יוצאי דופן, לדוגמה במקרים שהבסיס אינסופי.

$$\psi(x) = \sum \alpha_n \phi_n(x)$$

או

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ . \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

כאשר

$$\alpha_n = \langle \phi_n | \psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_n^*(x) \psi(x)\, dx$$

המכפלה הפנימית בהצגה באמצעות בסיס אורתונורמאלי:

$$\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle = \left(\alpha_1^*, \alpha_2^*, \alpha_3^*, .. \right) \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \cdots \end{pmatrix} = \sum \alpha_i^* \beta_i$$

שאלות:

1) ייצוג בבסיס לז'נדר

נתונה הפונקציה: $f(x)=|x|\ ,\ x\in[-1,1]$.

בתרגיל זה נתרגל פריסה (או ייצוג) באמצעות בסיס פולינומי לז'נדר המנורמל לקטע: $x\in[-1,1]$:

$$L_0(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\ ,\ L_1(x)=\sqrt{\frac{3}{2}}x\ ,\ L_2(x)=\sqrt{\frac{5}{2}}\cdot\frac{1}{2}\left(3x^2-1\right)\ ,\ L_3(x)=\sqrt{\frac{7}{2}}\cdot\frac{1}{2}\left(5x^3-3x\right)\ ,\ \ldots$$

א. הראו כי ארבעת איברי הבסיס הנ"ל הם אכן אורתונורמאלים, כלומר: $\delta_{nm}=\langle L_n|L_m\rangle$.

ב. מצאו את ארבעת המקדמים ("המשקלים") הראשונים בייצוג של $f(x)$ בבסיס לז'נדר. (רמז: $\alpha_n=\langle L_n|f\rangle$).

ג. רשמו את הפונקציה לפי ארבעת האיברים הראשונים ושרטטו אותה (באמצעות מחשב) על גבי הפונקציה המקורית.

2) חישוב אי ודאות בתנע ומיקום

א. חשבו את אי הודאות במקום ובתנע של המצב: $|\psi\rangle=|x_1\rangle$.
הנחייה: בשביל לחשב את ערכי התצפית של התנע השתמשו בקשר: $\langle p|x\rangle=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{-\frac{ipx}{\hbar}}$ (או בטרנספורם פורייה) על מנת למצא את פונקציית הגל בבסיס התנע.

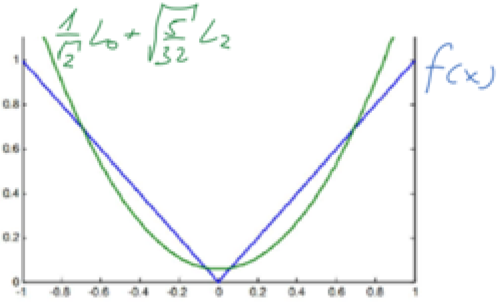
ב. חשבו את אי הודאות במקום ובתנע של המצב: $|\psi\rangle=\alpha|x_1\rangle+\beta|x_2\rangle$.
(α , β ממשיים).
מהו החסם על אי הודאות בתנע?
(את אי הוודאות בתנע ניתן להשאיר כאינטגרל).

ג. מה יקרה לפונקציית הגל אם נערוך מדידה ונקבל שהחלקיק נמצא ב-x_1?

תשובות סופיות:

1) א. הוכחה. ב. $\alpha_1=\alpha_3=0\ ,\ \alpha_0=\frac{1}{\sqrt{2}}\ ,\ \alpha_2=\sqrt{\frac{5}{32}}$

ג. $f(x)\approx\frac{1}{\sqrt{2}}L_0+\sqrt{\frac{5}{32}}L_2$



2) א. $\Delta x=0\ ,\ \Delta p=\infty$

ב.

$$\Delta x=\alpha\beta\left|x_1-x_2\right|\ ,\ \langle p\rangle=0\ ,\ \langle p^2\rangle=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty}p\left[1+2\alpha\beta\cos\left(\frac{p(x_1-x_2)}{\hbar}\right)\right]dp=\infty$$

ג. פונקציית הגל תקרוס ונחזור למצב של סעיף א'.

אי שוויון שוורץ:

$$|\langle a|b\rangle|^2\le\langle a|a\rangle\langle b|b\rangle$$

זווית מוכללת בין וקטורים:

$$\cos\theta=\sqrt{\frac{\langle a|b\rangle\langle b|a\rangle}{\langle a|a\rangle\langle b|b\rangle}}$$

אי שוויון המשולש:

$$|(|a\rangle+|b\rangle)|\le|a|+|b|$$

שאלות:

1) אי שוויון שוורץ

הוכיחו את אי שוויון שוורץ: $|\langle a|b\rangle|^2 \leq \langle a|a\rangle\langle b|b\rangle$.

השתמשו ב-$|c\rangle = |a\rangle - \frac{\langle b|a\rangle}{\langle b|b\rangle}|b\rangle$ ובעובדה שהנורמה של וקטור תמיד גדולה או שווה לאפס $\langle c|c\rangle \geq 0$.

2) אי שוויון המשולש

הוכיחו את אי שוויון המשולש: $|(|a\rangle + |b\rangle)| \leq |a| + |b|$.

רמז: השתמשו גם באי שוויון שוורץ.

תשובות סופיות:

1) הוכחה.
2) הוכחה.