

# פיזיקה למתמטיקאים 8832001

פרק 14 - פורמליזם אלגברי לתורת הקוונטים

תוכן העניינים

1. הרצאות ותרגילים.....1

## ייצוג באמצעות אלגברה לינארית:

### סיכום כללי:

פונקציות הגל מקיימות את התנאים של מרחב וקטורי.  
הכללות:

1. נעבוד עם וקטורים ביותר משלושה מימדים.
2. נעבוד עם סקלרים שיכולים להיות גם מספרים מורכבים.

כתיב דיראק:

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} \quad \text{:ket}$$

$$\langle\psi| = (\alpha_1^*, \alpha_2^*, \alpha_3^*, \dots) \quad \text{:bra}$$

מכפלה פנימית - הכללה של מכפלה סקלרית ליותר מ-3 מימדים.

תכונות המכפלה הפנימית:

תכונה 1:  $\langle v|u\rangle = \langle u|v\rangle^*$  סקלר

תכונה 2:  $\langle v|v\rangle \geq 0$  ממשי, אם  $\langle v|v\rangle = 0$  אז  $|v\rangle = |0\rangle$

תכונה 3:  $\langle v|(\alpha|u\rangle + \beta|k\rangle) = \alpha\langle v|u\rangle + \beta\langle v|k\rangle$   
הגדרת המכפלה הפנימית בפונקציות הגל:

$$\langle\psi_1|\psi_2\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_1^* \psi_2 dx$$

נורמה – הכללה של גודל של וקטור ליותר מ-3 מימדים.

$$\|v\| = \sqrt{\langle v|v\rangle}$$

אם המכפלה הפנימית של שני וקטורים מתאפסת אז אומרים שהוקטורים אורתוגונליים.

מרחב  $L_2$  (או  $L^2$ ) – מכיל את כל הפונקציות שהאינטגרל על גודל הפונקציה בריבוע

$$\text{אינו מתבדר: } \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty .$$

בפיזיקה, מרחב פונקציות הגל שנעבוד איתו נקרא מרחב הילברט ובפועל הוא יהיה המרחב  $L_2$ .

\* הפונקציות העצמיות של התנע והמיקום אינם ב- $L_2$  אבל עדיין עובדים איתם.

ייצוג באמצעות בסיס:

בסיס – סט של וקטורים (בלתי תלויים) שבאמצעותם ניתן לבטא כל וקטור אחר במרחב.

בסיס אורתונורמלי – בסיס שבו כל הוקטורים אורתונורמליים.

בסיס אורתונורמלי – בסיס אורתונורמלי שבו הנורמה של כל וקטור היא 1.

הבסיס הסטנדרטי – בסיס שמורכב מוקטורי יחידה.

סט הפונקציות העצמיות (או הו"ע) של כל אופרטור מהוות בסיס\*  
 \* יש יוצאי דופן, לדוגמה במקרים שהבסיס אינסופי.

$$\psi(x) = \sum \alpha_n \phi_n(x)$$

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \quad \text{או}$$

$$\alpha_n = \langle \phi_n | \psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_n^*(x) \psi(x) dx \quad \text{כאשר}$$

המכפלה הפנימית בהצגה באמצעות בסיס אורתונורמלי:

$$\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle = (\alpha_1^*, \alpha_2^*, \alpha_3^*, \dots) \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \dots \end{pmatrix} = \sum \alpha_i^* \beta_i$$

## שאלות:

## (1) ייצוג בסיס לז'נדר

נתונה הפונקציה:  $f(x) = |x|$ ,  $x \in [-1, 1]$ .

בתרגיל זה נתרגל פריסה (או ייצוג) באמצעות בסיס פולינומי לז'נדר המנורמל לקטע:  $x \in [-1, 1]$ .

$$L_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}, L_1(x) = \sqrt{\frac{3}{2}}x, L_2(x) = \sqrt{\frac{5}{2}} \cdot \frac{1}{2}(3x^2 - 1), L_3(x) = \sqrt{\frac{7}{2}} \cdot \frac{1}{2}(5x^3 - 3x), \dots$$

א. הראו כי ארבעת איברי הבסיס הנ"ל הם אכן אורתונורמלים,

$$\delta_{nm} = \langle L_n | L_m \rangle.$$

ב. מצאו את ארבעת המקדמים ("המשקלים") הראשונים בייצוג של  $f(x)$

$$\text{בבסיס לז'נדר. (רמז: } \langle L_n | f \rangle \text{)}$$

ג. רשמו את הפונקציה לפי ארבעת האיברים הראשונים ושרטטו אותה (באמצעות מחשב) על גבי הפונקציה המקורית.

## (2) חישוב אי ודאות בתנע ומיקום

א. חשבו את אי הודאות במקום ובתנע של המצב:  $|\psi\rangle = |x_1\rangle$ . הנחייה: בשביל לחשב את ערכי התצפית של התנע השתמשו

בקשר:  $\langle p|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-\frac{ipx}{\hbar}}$  (או בטרנספורם פורייה) על מנת למצוא את פונקציית הגל בבסיס התנע.

ב. חשבו את אי הודאות במקום ובתנע של המצב:  $|\psi\rangle = \alpha|x_1\rangle + \beta|x_2\rangle$ . (ממשיים  $\beta, \alpha$ ).

מהו החסם על אי הודאות בתנע?

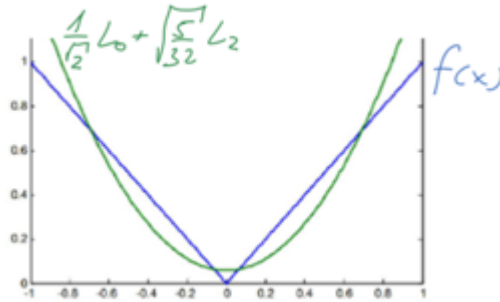
(את אי הודאות בתנע ניתן להשאיר כאינטגרל).

ג. מה יקרה לפונקציית הגל אם נערוך מדידה ונקבל שהחלקיק נמצא ב- $x_1$ ?

**תשובות סופיות:**

(1) א. הוכחה. ב.  $\alpha_1 = \alpha_3 = 0, \alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \alpha_2 = \sqrt{\frac{5}{32}}$

ג.  $f(x) \approx \frac{1}{\sqrt{2}}L_0 + \sqrt{\frac{5}{32}}L_2$



(2) א.  $\Delta x = 0, \Delta p = \infty$

ב.

□  $x = \alpha\beta|x_1 - x_2|, \langle p \rangle = 0, \langle p^2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} p \left[ 1 + 2\alpha\beta \cos\left(\frac{p(x_1 - x_2)}{\hbar}\right) \right] dp = \infty$

ג. פונקציית הגל תקרוס ונחזור למצב של סעיף א'.

**אי שוויון שורץ:**

$$|\langle a|b \rangle|^2 \leq \langle a|a \rangle \langle b|b \rangle$$

זווית מוכללת בין וקטורים:

$$\cos \theta = \frac{\langle a|b \rangle \langle b|a \rangle}{\langle a|a \rangle \langle b|b \rangle}$$

אי שוויון המשולש:

$$|\langle a + b | a + b \rangle| \leq |a| + |b|$$

## שאלות:

## (1) אי שוויון שורץ

הוכיחו את אי שוויון שורץ:  $\langle a|a\rangle\langle b|b\rangle \geq |\langle a|b\rangle|^2$ .

השתמשו ב- $|c\rangle = |a\rangle - \frac{\langle b|a\rangle}{\langle b|b\rangle}|b\rangle$  ובעובדה שהנורמה של וקטור תמיד גדולה או שווה לאפס  $\langle c|c\rangle \geq 0$ .

## (2) אי שוויון המשולש

הוכיחו את אי שוויון המשולש:  $|(|a\rangle + |b\rangle)| \leq |a| + |b|$ .  
 רמז: השתמשו גם באי שוויון שורץ.

## תשובות סופיות:

(1) הוכחה.

(2) הוכחה.