

מתמטיקה בדידה 2

פרק 1 - פונקציות

תוכן העניינים

1. מבוא והגדרות ראשונות.....1

מבוא לפונקציות:

שאלות:

אופציה	תיאור	אופציה	תיאור

- (1) בכל אחד מהאיורים הבאים זהה את התחום ואת הטווח ובחר את האפשרות המתאימה:
- א. זו אינה פונקציה.
 - ב. זו פונקציה חח"ע שאינה על.
 - ג. זו פונקציה על שאינה חח"ע.
 - ה. זו פונקציה שאינה חח"ע ואינה על.
 - ו. זו פונקציה שהיא גם חח"ע וגם על.

- (2) עבור הפונקציה $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ מוגדרת ע"י $g(x) = \lfloor x \rfloor$ (ערך שלם תחתון של x). חשב את:

א. $g(\pi), g(-\pi)$

ב. $\text{Im}(g)$

ג. מצא מקור ל-7.

ד. מצא את כל המקורות ל-7.

ה. האם כל איבר בטווח הוא גם תמונה?

- (3) עבור כל אחת מהפונקציות הבאות, קבע האם היא חח"ע? האם על? הוכח טענותיך.

א. פונקציית הזהות $I_A: A \rightarrow A$ המוגדרת ע"י $I_A(x) = x$.

ב. $h_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ מוגדרת ע"י $h_1(x) = 2x + 1$.

ג. $h_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ מוגדרת ע"י $h_2(x) = \lfloor x \rfloor$ (ערך שלם תחתון של x).

ד. $h_3: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ מוגדרת ע"י $h_3(x, y) = x - y$.

ה. $h_4: P(\mathbb{N}) \times P(\mathbb{N}) \rightarrow P(\mathbb{N})$ מוגדרת ע"י $h_4(A, B) = A \cup B$ וחשב את $\text{Im} h_4$.

ו. $f_1: (0, \infty) \rightarrow (0, 2)$ מוגדרת ע"י $f_1(x) = \frac{2x}{x+3}$.

- ז. $f_2: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ מוגדרת ע"י $f_2(x) = x + \frac{1}{x}$.
- ח. $f_3: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ מוגדרת ע"י $f_3(x) = x - \frac{1}{x}$.
- ט. $f_4: P(\mathbb{R}) \rightarrow P(\mathbb{R})$ מוגדרת ע"י $f_4(X) = X \cap \mathbb{Z}$.
- י. $f_5: P(\mathbb{R}) \rightarrow P(\mathbb{Z})$ מוגדרת ע"י $f_5(X) = X \cap \mathbb{Z}$.
- יא. $f_6: P(\mathbb{R}) \rightarrow P(\mathbb{R})$ מוגדרת ע"י $f_6(X) = X \Delta \mathbb{Z}$.
- יב. $f_7: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ מוגדרת ע"י $f_7(n) = \text{the sum of the digits of } n$.
- יג. $f_8: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ מוגדרת ע"י $f_8(\langle x, y \rangle) = 3x + 2y$.
- יד. $f_9: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ מוגדרת ע"י $f_9(\langle n, k \rangle) = 2^{n-1}(2k-1)$.
- טו. $h: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ מוגדרת ע"י $h(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & n \in \mathbb{N}_{\text{even}} \\ n+3 & n \in \mathbb{N}_{\text{odd}} \end{cases} = \begin{cases} \frac{n}{2} & n \in \mathbb{N}_{\text{even}} \\ n+3 & \text{else} \end{cases}$.

4) בדוק אם הפונקציות הבאות חח"ע, על וחשב את תמונתן:

- א. $f_9: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ מוגדרת ע"י $f_9(x) = \begin{cases} \frac{n}{2} & 4|n \\ 2n+1 & \text{else} \end{cases}$ וחשב את $Im f_9$.
- ב. $f_{10}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ מוגדרת ע"י $f_{10}(x) = \begin{cases} 3x-1 & x < 2 \\ x-3 & x \geq 2 \end{cases}$ וחשב את $Im f_{10}$.
- ג. $f_{11}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ מוגדרת ע"י $f_{11}(x) = \begin{cases} x+1 & x \leq 1 \\ \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} & x > 1 \end{cases}$.

5) תהיינה $f, g: A \rightarrow A$ פונקציה. הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות:

- א. אם לכל איבר ב- $Im(f)$ יש מקור יחיד אז f חח"ע.
- ב. אם לכל איבר ב- $Im(f)$ יש מקור יחיד אז f על.
- ג. אם לכל איבר ב- $Im(f)$ יש מקור יחיד אז f אינה קבועה.
- ד. אם יש איבר ב- $Im(f)$ ללא מקור אז f על.
- ה. אם $Im(f) \subset Im(g)$ (הכלה ממש) אז f אינה על.
- ו. אם $Im(f) \subset Im(g)$ (הכלה ממש) אז g אינה על.
- ז. אם $Im(f) = Im(g)$ אז $f = g$.
- ח. לכל $D \subseteq A, D \neq \emptyset$ קיימת $f: A \rightarrow A$ כך ש- $Im(f) = D$.

6 נתונה $g: \mathbb{N}_{odd} \rightarrow \mathbb{N}$ פונקציה לא ידועה.

$$גגדיר $h: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ באופן הבא:
$$h(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & n \in \mathbb{N}_{even} \\ g(n) & n \in \mathbb{N}_{odd} \end{cases}$$$$

למשל: $h(34) = 17$, $h(35) = g(35)$ שהוא מספר טבעי לא ידוע.
הוכח כי h אינה חח"ע.

מצא אינסוף מספרים טבעיים שונים $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ כך שלכל $i \neq j$ מתקיים $h(x_i) = h(x_j)$.

7 גגדיר $F: (\mathbb{R}^{\mathbb{R}} \times P(\mathbb{R})) \rightarrow P(\mathbb{R})$ באופן הבא: $F((f, A)) = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists y \in A \ f(y) = x\}$

א. עבור $A = \{2, 3, 4, 5, 17, 18\}$, $g(x) = 2x$, חשב: $F((g, A))$.

ב. בדוק האם f חח"ע והאם על.

ג. מצא את $\text{Im}(F)$.

8 גגדיר $G: \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \rightarrow P(\mathbb{N})$ באופן הבא: $G(f) = \{\alpha \in \mathbb{N} \mid \exists \beta \in \mathbb{N} \ f(\beta) = \alpha\}$

א. חשב $G(f)$ עבור $f = I_{\mathbb{N}}$ פונקציית הזהות \mathbb{N} עבור

$$f(n) = \begin{cases} 1 & n \in \mathbb{N}_{even} \\ 4 & \text{else} \end{cases}$$

ועבור הפונקציה הקבועה 3.

ב. בדוק האם G חח"ע והאם על ומצא את $\text{Im}(G)$.

9 גגדיר פונקציה $F: \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow P(\{0, 1\} \times \{0, 1\})$ באופן הבא:

$$F(g) = \{(g(n), g(n+1)) \mid n \in \mathbb{N}\}$$

הוכח כי F אינה על.

10 גגדיר $F: \mathbb{N}^{\mathbb{R}} \rightarrow P(\mathbb{N})$ באופן הבא: $F(f) = \{n \in \mathbb{R} \mid f(x) = 1\}$

הוכח כי F אינה חח"ע.

11 גגדיר פונקציה $F: \{0, 1, 2\}^{\mathbb{N}} \rightarrow P(\mathbb{N})$ באופן הבא: $F(f) = \{n \in \mathbb{N} \mid f(n) = 0\}$

קבע האם F חח"ע ועל.

12 תהי $P_{\text{even}}(\mathbb{N})$ קבוצת כל תת הקבוצות של \mathbb{N} שמספר אבריהן זוגי. ותהי $P_{\text{odd}}(\mathbb{N})$ קבוצת כל התת הקבוצות של \mathbb{N} שמספר אבריהן אי זוגי. לדוגמה $\{1,3\} \in P_{\text{even}}(\mathbb{N}), \{1,3\} \notin P_{\text{odd}}(\mathbb{N})$, ולעומת זאת, $\{2,4,6\} \in P_{\text{odd}}(\mathbb{N}), \{2,4,6\} \notin P_{\text{even}}(\mathbb{N})$. לכל קבוצה A סופית של טבעיים נסמן ב- $\max(A)$ את המספר הגדול ביותר ב- A וב- $\max(\emptyset) = 0$. הוכיחו כי הפונקציה $f: P_{\text{even}}(\mathbb{N}) \rightarrow P_{\text{odd}}(\mathbb{N})$ המוגדרת על ידי $f(A) = A \cup \max(A)$ היא חח"ע אך אינה על.

13 נגדיר $H: \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \rightarrow P(\mathbb{R})$ באופן הבא: $H(\langle f, g \rangle) = \text{Im } f \Delta \text{Im } g$. בדוק אם f חח"ע ועל.

פונקציות שחובה להכיר:

- 14** בכל אחד מהסעיפים הבאים מצא פונקציה כנדרש:
- מצא $f: (0,1) \rightarrow (1,\infty)$ שהיא חח"ע ועל.
 - השתמש בפונקציה שמצאת בסעיף קודם כדי למצוא $f: (0,1) \rightarrow (0,\infty)$ שהיא חח"ע ועל.
 - מצא $f: [2,5] \rightarrow [1,7]$ שהיא חח"ע ועל.
 - עבור $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ מספרים נתונים מצא $f: [a,b] \rightarrow [c,d]$ שהיא חח"ע ועל.
 - מצא $f: [1,3] \cup [4,8] \rightarrow [0,1]$ שהיא חח"ע ועל.
 - מצא פונקציה $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ שהיא חח"ע ועל. מצא גם $g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ שהיא היפוך החיצים לפונקציה $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ שמצאת.
 - מצא פונקציה $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ שהיא חח"ע ועל.
 - מצא פונקציה $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ שהיא חח"ע.
 - מצא $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ שהיא על. (רמז: סעיף קודם)
 - מצא פונקציה $f: \underbrace{\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \dots \times \mathbb{N}}_7 \rightarrow \mathbb{N}$ (כלומר $f: \mathbb{N}^7 \rightarrow \mathbb{N}$) שהיא חח"ע.
 - מצא פונקציה $f: \mathbb{N} \times [0,1] \rightarrow [0,\infty)$ שהיא חח"ע ועל.
 - מצא גם $g: [0,\infty) \rightarrow \mathbb{N} \times [0,1]$ שהיא היפוך החיצים לפונקציה שמצאת.
 - מצא פונקציה $f: (0,1] \rightarrow (0,1)$ שהיא חח"ע ועל.
 - מצא $F: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ חח"ע ועל.
 - מצא פונקציה $f: \mathbb{N} \times \{0,1\} \rightarrow \mathbb{N}$ שהיא חח"ע ועל.
 - מצא גם $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \{0,1\}$ שהיא היפוך החיצים לפונקציה שמצאת.

טו. מצא $f: \mathbb{R} \rightarrow (-1,1)$ שהיא חח"ע ועל.

טז. מצא $F: \{0,1\}^A \rightarrow P(A)$ חח"ע ועל. הוכח כי הפונקציה שמצאת היא אכן חח"ע ועל.

יז. מצא $F: \{0,1\}^{\mathbb{N}_{\text{even}}} \times \{0,1\}^{\mathbb{N}_{\text{odd}}} \rightarrow \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ שהיא חח"ע ועל.

יח. מצא $F: (\{0,1\}^{\mathbb{N}})^2 \rightarrow \{0,1,2,3\}^{\mathbb{N}}$ כלומר $F: \{0,1\}^{\mathbb{N}} \times \{0,1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow \{0,1,2,3\}^{\mathbb{N}}$ שהיא חח"ע ועל והוכח שהיא חח"ע ועל.