

לוגיקה ותורת הקבוצות

פרק 3 - פונקציות

תוכן העניינים

1. מבוא והגדרות ראשוניות 1
2. תמונה של קבוצה 6
3. הרכבת פונקציות והפונקציה ההפוכה 10

מבוא לפונקציות:

שאלות:

אופציה	תיאור	אופציה	תיאור

- (1) בכל אחד מהאיורים הבאים זהה את התחום ואת הטווח ובחר את האפשרות המתאימה:
- א. זו אינה פונקציה.
 - ב. זו פונקציה חח"ע שאינה על.
 - ג. זו פונקציה על שאינה חח"ע.
 - ה. זו פונקציה שאינה חח"ע ואינה על.
 - ו. זו פונקציה שהיא גם חח"ע וגם על.

- (2) עבור הפונקציה $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ מוגדרת ע"י $g(x) = \lfloor x \rfloor$ (ערך שלם תחתון של x). חשב את:

א. $g(\pi), g(-\pi)$

ב. $\text{Im}(g)$

ג. מצא מקור ל-7.

ד. מצא את כל המקורות ל-7.

ה. האם כל איבר בטווח הוא גם תמונה?

- (3) עבור כל אחת מהפונקציות הבאות, קבע האם היא חח"ע? האם על? הוכח טענותיך.

א. פונקציית הזהות $I_A: A \rightarrow A$ המוגדרת ע"י $I_A(x) = x$.

ב. $h_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ מוגדרת ע"י $h_1(x) = 2x + 1$.

ג. $h_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ מוגדרת ע"י $g(x) = \lfloor x \rfloor$ (ערך שלם תחתון של x).

ד. $h_3: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ מוגדרת ע"י $h_3(x, y) = x - y$.

ה. $h_4: P(\mathbb{N}) \times P(\mathbb{N}) \rightarrow P(\mathbb{N})$ מוגדרת ע"י $h_4(A, B) = A \cup B$ וחשב את $\text{Im} h_4$.

ו. $f_1: (0, \infty) \rightarrow (0, 2)$ מוגדרת ע"י $f_1(x) = \frac{2x}{x+3}$.

- ז. $f_2: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ מוגדרת ע"י $f_2(x) = x + \frac{1}{x}$.
- ח. $f_3: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ מוגדרת ע"י $f_3(x) = x - \frac{1}{x}$.
- ט. $f_4: P(\mathbb{R}) \rightarrow P(\mathbb{R})$ מוגדרת ע"י $f_4(X) = X \cap \mathbb{Z}$.
- י. $f_5: P(\mathbb{R}) \rightarrow P(\mathbb{Z})$ מוגדרת ע"י $f_5(X) = X \cap \mathbb{Z}$.
- יא. $f_6: P(\mathbb{R}) \rightarrow P(\mathbb{R})$ מוגדרת ע"י $f_6(X) = X \Delta \mathbb{Z}$.
- יב. $f_7: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ מוגדרת ע"י $f_7(n) = \text{the sum of the digits of } n$.
- יג. $f_8: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ מוגדרת ע"י $f_8(\langle x, y \rangle) = 3x + 2y$.
- יד. $f_9: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ מוגדרת ע"י $f_9(\langle n, k \rangle) = 2^{n-1}(2k-1)$.
- טו. $h: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ מוגדרת ע"י $h(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & n \in \mathbb{N}_{\text{even}} \\ n+3 & n \in \mathbb{N}_{\text{odd}} \end{cases} = \begin{cases} \frac{n}{2} & n \in \mathbb{N}_{\text{even}} \\ n+3 & \text{else} \end{cases}$.

4) בדוק אם הפונקציות הבאות חח"ע, על וחשב את תמונתן:

- א. $f_9: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ מוגדרת ע"י $f_9(x) = \begin{cases} \frac{n}{2} & 4|n \\ 2n+1 & \text{else} \end{cases}$ וחשב את $Im f_9$.
- ב. $f_{10}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ מוגדרת ע"י $f_{10}(x) = \begin{cases} 3x-1 & x < 2 \\ x-3 & x \geq 2 \end{cases}$ וחשב את $Im f_{10}$.
- ג. $f_{11}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ מוגדרת ע"י $f_{11}(x) = \begin{cases} x+1 & x \leq 1 \\ \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} & x > 1 \end{cases}$.

5) תהיינה $f, g: A \rightarrow A$ פונקציה. הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות:

- א. אם לכל איבר ב- $Im(f)$ יש מקור יחיד אז f חח"ע.
- ב. אם לכל איבר ב- $Im(f)$ יש מקור יחיד אז f על.
- ג. אם לכל איבר ב- $Im(f)$ יש מקור יחיד אז f אינה קבועה.
- ד. אם יש איבר ב- $Im(f)$ ללא מקור אז f על.
- ה. אם $Im(f) \subset Im(g)$ (הכלה ממש) אז f אינה על.
- ו. אם $Im(f) \subset Im(g)$ (הכלה ממש) אז g אינה על.
- ז. אם $Im(f) = Im(g)$ אז $f = g$.
- ח. לכל $D \neq \emptyset, D \subseteq A$ קיימת $f: A \rightarrow A$ כך ש- $Im(f) = D$.

6 נתונה $g: \mathbb{N}_{odd} \rightarrow \mathbb{N}$ פונקציה לא ידועה.

$$נגדיר $h: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ באופן הבא:
$$h(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & n \in \mathbb{N}_{even} \\ g(n) & n \in \mathbb{N}_{odd} \end{cases}$$$$

למשל: $h(34) = 17$, $h(35) = g(35)$ שהוא מספר טבעי לא ידוע.
הוכח כי h אינה חח"ע.

מצא אינסוף מספרים טבעיים שונים $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ כך שלכל $i \neq j$ מתקיים $h(x_i) = h(x_j)$.

7 נגדיר $F: (\mathbb{R}^{\mathbb{R}} \times P(\mathbb{R})) \rightarrow P(\mathbb{R})$ באופן הבא: $F((f, A)) = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists y \in A \ f(y) = x\}$

א. עבור $A = \{2, 3, 4, 5, 17, 18\}$, $g(x) = 2x$, חשב: $F((g, A))$.

ב. בדוק האם f חח"ע והאם על.

ג. מצא את $\text{Im}(F)$.

8 נגדיר $G: \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \rightarrow P(\mathbb{N})$ באופן הבא: $G(f) = \{\alpha \in \mathbb{N} \mid \exists \beta \in \mathbb{N} \ f(\beta) = \alpha\}$

א. חשב $G(f)$ עבור $f = I_{\mathbb{N}}$ פונקציית הזהות \mathbb{N} עבור

$$f(n) = \begin{cases} 1 & n \in \mathbb{N}_{even} \\ 4 & \text{else} \end{cases}$$

ועבור הפונקציה הקבועה 3.

ב. בדוק האם G חח"ע והאם על ומצא את $\text{Im}(G)$.

9 נגדיר פונקציה $F: \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow P(\{0, 1\} \times \{0, 1\})$ באופן הבא:

$$F(g) = \{(g(n), g(n+1)) \mid n \in \mathbb{N}\}$$

הוכח כי F אינה על.

10 נגדיר $F: \mathbb{N}^{\mathbb{R}} \rightarrow P(\mathbb{N})$ באופן הבא: $F(f) = \{n \in \mathbb{R} \mid f(x) = 1\}$

הוכח כי F אינה חח"ע.

11 נגדיר פונקציה $F: \{0, 1, 2\}^{\mathbb{N}} \rightarrow P(\mathbb{N})$ באופן הבא: $F(f) = \{n \in \mathbb{N} \mid f(n) = 0\}$

קבע האם F חח"ע ועל.

12 תהי $P_{\text{even}}(\mathbb{N})$ קבוצת כל תת הקבוצות של \mathbb{N} שמספר אבריהן זוגי. ותהי $P_{\text{odd}}(\mathbb{N})$ קבוצת כל התת הקבוצות של \mathbb{N} שמספר אבריהן אי זוגי. לדוגמה $\{1,3\} \in P_{\text{even}}(\mathbb{N}), \{1,3\} \notin P_{\text{odd}}(\mathbb{N})$, ולעומת זאת, $\{2,4,6\} \in P_{\text{odd}}(\mathbb{N}), \{2,4,6\} \notin P_{\text{even}}(\mathbb{N})$. לכל קבוצה A סופית של טבעיים נסמן ב- $\max(A)$ את המספר הגדול ביותר ב- A וב- $\max(\emptyset) = 0$. הוכיחו כי הפונקציה $f: P_{\text{even}}(\mathbb{N}) \rightarrow P_{\text{odd}}(\mathbb{N})$ המוגדרת על ידי $f(A) = A \cup \max(A)$ היא חח"ע אך אינה על.

13 נגדיר $H: \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \rightarrow P(\mathbb{R})$ באופן הבא: $H(\langle f, g \rangle) = \text{Im } f \Delta \text{Im } g$. בדוק אם f חח"ע ועל.

פונקציות שחובה להכיר:

- 14** בכל אחד מהסעיפים הבאים מצא פונקציה כנדרש:
- מצא $f: (0,1) \rightarrow (1,\infty)$ שהיא חח"ע ועל.
 - השתמש בפונקציה שמצאת בסעיף קודם כדי למצוא $f: (0,1) \rightarrow (0,\infty)$ שהיא חח"ע ועל.
 - מצא $f: [2,5] \rightarrow [1,7]$ שהיא חח"ע ועל.
 - עבור $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ מספרים נתונים מצא $f: [a,b] \rightarrow [c,d]$ שהיא חח"ע ועל.
 - מצא $f: [1,3] \cup [4,8] \rightarrow [0,1]$ שהיא חח"ע ועל.
 - מצא פונקציה $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ שהיא חח"ע ועל. מצא גם $g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ שהיא היפוך החיצים לפונקציה $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ שמצאת.
 - מצא פונקציה $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ שהיא חח"ע ועל.
 - מצא פונקציה $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ שהיא חח"ע.
 - מצא $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ שהיא על. (רמז: סעיף קודם).
 - מצא פונקציה $f: \underbrace{\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \dots \times \mathbb{N}}_7 \rightarrow \mathbb{N}$ (כלומר $f: \mathbb{N}^7 \rightarrow \mathbb{N}$) שהיא חח"ע.
 - מצא פונקציה $f: \mathbb{N} \times [0,1) \rightarrow [0,\infty)$ שהיא חח"ע ועל.
 - מצא גם $g: [0,\infty) \rightarrow \mathbb{N} \times [0,1)$ שהיא היפוך החיצים לפונקציה שמצאת.
 - מצא פונקציה $f: (0,1] \rightarrow (0,1)$ שהיא חח"ע ועל.
 - מצא $F: [0,1) \times [0,1) \rightarrow [0,1)$ חח"ע ועל.
 - מצא פונקציה $f: \mathbb{N} \times \{0,1\} \rightarrow \mathbb{N}$ שהיא חח"ע ועל.
 - מצא גם $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \{0,1\}$ שהיא היפוך החיצים לפונקציה שמצאת.

טו. מצא $f: \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1)$ שהיא חח"ע ועל.

טז. מצא $F: \{0, 1\}^A \rightarrow P(A)$ חח"ע ועל. הוכח כי הפונקציה שמצאת היא אכן חח"ע ועל.

יז. מצא $F: \{0, 1\}^{\mathbb{N}_{\text{even}}} \times \{0, 1\}^{\mathbb{N}_{\text{odd}}} \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ שהיא חח"ע ועל.

יח. מצא $F: (\{0, 1\}^{\mathbb{N}})^2 \rightarrow \{0, 1, 2, 3\}^{\mathbb{N}}$ כלומר $F: \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \times \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow \{0, 1, 2, 3\}^{\mathbb{N}}$ שהיא חח"ע ועל והוכח שהיא חח"ע ועל.

תמונה של קבוצה:

רקע:

צפה בשיעורים בנושא תמונה ותמונה הפוכה של קבוצה בטרם תענה על השאלות שבנושא זה.

$$f(D) \subseteq E \Leftrightarrow \exists x \in D \text{ כך ש-} f(x) \in E$$

$$y \in f(D) \Leftrightarrow \exists x \in D \text{ כך ש-} f(x) = y$$

$$z \in f^{-1}(E) \Leftrightarrow f(z) \in E$$

שאלות:

(1) נגדיר $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ מוגדרת ע"י: $g(n) = 2n$. $K = \{1, 8, 17\}$

חשב את הקבוצות הבאות:

א. $g(K)$

ב. $g^{-1}(K)$

ג. $g(\mathbb{N})$

ד. $g(\mathbb{N}_{\text{even}})$

ה. $g(\mathbb{N}_{\text{odd}})$

ו. $g^{-1}(\mathbb{N}_{\text{even}})$

ז. $g^{-1}(\mathbb{N}_{\text{odd}})$

(2) נגדיר $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ מוגדרת ע"י: $f(x) = x^2 - 5x + 4$. $M = \{0, 4\}$

נגדיר $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ מוגדרת ע"י: $f(n) = \begin{cases} 2n & n \in \mathbb{N}_{\text{even}} \\ 1 & \text{else} \end{cases}$ ותהי $E = \{1, 5, 6, 8\}$

חשב את הקבוצות הבאות:

א. $f^{-1}(f(M))$

ב. $f(f^{-1}(M))$

ג. $f(f^{-1}(\{-3, 4\}))$

ד. $f(f^{-1}(\{-3\}))$

ה. $f(f^{-1}(E))$

3) תהי $f: A \rightarrow B$ פונקציה ותהינה $D \subseteq A$, $E \subseteq B$ שתי קבוצות. הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות:

א. $f(D) = D$

ב. $f(D) \neq D$

ג. $f^{-1}(E) = E$

ד. $f^{-1}(E) \neq E$

ה. $f(D) \subseteq f(A)$

ו. אם $D \subset A$ אז $f(D) \subset f(A)$ (שים ♥ שההכלות בסעיף זה הן הכלות ממש).

ז. $f^{-1}(E) \subseteq A$

ח. אם $E \subset B$ אז $f^{-1}(E) \subset A$ (שים ♥ שההכלות בסעיף זה הן הכלות ממש).

ט. f על אס"ם לכל $y \in B$ מתקיים: $f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$.

י. f חח"ע אס"ם לכל $y \in A$ מתקיים: $f^{-1}(\{y\})$ ריקה או בעלת איבר אחד.

4) בשאלה זו נבחן את השוויון: $f(D_1 \cup D_2) = f(D_1) \cup f(D_2)$

א. אשר את השוויון עבור $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ מוגדרת ע"י: $f(x) = x^2$.

$$D_1 = \{2, 5\} \quad D_2 = \{-2, 4\}$$

ב. הוכח כי שוויון זה מתקיים תמיד.

כלומר: תהי $f: A \rightarrow B$ פונקציה ותהינה $D_1, D_2 \subseteq A$.

הוכח כי: $f(D_1 \cup D_2) = f(D_1) \cup f(D_2)$

5) $f: A \rightarrow B$ פונקציה ותהינה $D_1, D_2 \subseteq A$

הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות:

א. $f(D_1 \cap D_2) \subseteq f(D_1) \cap f(D_2)$

ב. $f(D_1 \cap D_2) \supseteq f(D_1) \cap f(D_2)$

ג. אם f חח"ע אז $f(D_1 \cap D_2) = f(D_1) \cap f(D_2)$

ד. אם f על אז $f(D_1 \cap D_2) = f(D_1) \cap f(D_2)$

ה. אם $f(D_1 \cap D_2) \neq f(D_1) \cap f(D_2)$ אז f אינה חח"ע.

6) $f: A \rightarrow B$ פונקציה ותהינה $E_1, E_2 \subseteq B$

הוכח כל אחת מהטענות הבאות:

א. $f^{-1}(E_1 \cap E_2) = f^{-1}(E_1) \cap f^{-1}(E_2)$

ב. $f^{-1}(E_1 \cup E_2) = f^{-1}(E_1) \cup f^{-1}(E_2)$

7) $f : A \rightarrow B$ פונקציה ותהי $D \subseteq A$.

הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות:

א. $f^{-1}(f(D)) \subseteq D$

ב. $f^{-1}(f(D)) \supseteq D$

ג. אם f חח"ע אז $f^{-1}(f(D)) = D$.

ד. אם f לא חח"ע אז $f^{-1}(f(D)) \neq D$.

ה. אם f על אז $f^{-1}(f(D)) = D$.

ו. אם לכל $D \subseteq A$ מתקיים $f^{-1}(f(D)) = D$ אז f על.

ז. אם $f^{-1}(f(D)) = D$ אז f חח"ע.

ח. אם לכל $D \subseteq A$ מתקיים $f^{-1}(f(D)) = D$ אז f חח"ע.

ט. אם $f^{-1}(f(D)) \neq D$ אז f אינה חח"ע.

י. אם f על אז לכל $D \subseteq A$ מתקיים $f^{-1}(f(D)) = D$.

יא. אם f לא על אז קיימת $D \subseteq A$ עבורה $f^{-1}(f(D)) \neq D$.

יב. אם f לא חח"ע אז קיימת $D \subseteq A$ עבורה $f^{-1}(f(D)) \neq D$.

8) $f : A \rightarrow B$ פונקציה ותהי $E \subseteq B$ הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות:

א. $f(f^{-1}(E)) \subseteq E$

ב. $f(f^{-1}(E)) \supseteq E$

ג. $f(f^{-1}(E)) \subseteq E$ או $f(f^{-1}(E)) \supseteq E$.

ד. אם f חח"ע אז $f(f^{-1}(E)) = E$.

ה. אם f על אז $f(f^{-1}(E)) = E$.

ו. אם לכל $E \subseteq B$ מתקיים $f(f^{-1}(E)) = E$ אז f חח"ע.

ז. אם לכל $E \subseteq B$ מתקיים $f(f^{-1}(E)) = E$ אז f על.

ח. אם לא לכל $E \subseteq B$ מתקיים $f(f^{-1}(E)) = E$ אז f לא על.

ט. אם לכל $E \subseteq B$ מתקיים $f(f^{-1}(E)) = E$ אז f היא פונקציית הזהות.

י. אם קיימת $E \subseteq B$ כך ש- $f^{-1}(E) \neq E$ אז קיים $\alpha \in A$ כך שלכל $\beta \in A$

מתקיים: $f(\beta) \neq \alpha$.

9 נתונות פונקציה $f: A \rightarrow B$ וקבוצות $C, D \subseteq A$.

א. הוכח כי: $f(C \cap D) \subseteq f(C) \cap f(D)$.

ב. הוכח שאם f היא חד-חד-ערכית אז $f(C \cap D) = f(C) \cap f(D)$.

ג. הדגם קבוצות $C, D \subseteq \mathbb{N}$ ופונקציה $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ כך ש- f על

וגם $f(C \cap D) \subset f(C) \cap f(D)$.

ד. הוכח כי: $f(C \cup D) = f(C) \cup f(D)$.

תשובות סופיות:

- (1) א. $\{2, 16, 18\}$ ב. $\{4\}$ ג. $\{4n | n \in \mathbb{N}\}$ ד. ראה סרטון.
ה. $\{4n + 2 | n \in \mathbb{N}\}$ ו. \mathbb{N} ז. \emptyset
- (2) א. $\{0, 1, 4, 5\}$ ב. $\{0, 4\}$ ג. $\{0, 4\}$ ד. \emptyset ה. $\{1, 8\}$
- (3) א. לא נכון. ב. לא נכון. ג. לא נכון. ד. לא נכון. ה. נכון.
ו. לא נכון. ז. נכון. ח. לא נכון. ט. נכון. י. נכון.
- (4) הוכחה.
- (5) א. נכון. ב. לא נכון. ג. נכון. ד. לא נכון. ה. נכון.
- (6) הוכחה.
- (7) א. לא נכון. ב. נכון. ג. נכון. ד. לא נכון. ה. לא נכון.
ו. לא נכון. ז. לא נכון. ח. נכון. ט. נכון. י. לא נכון.
יא. לא נכון. יב. לא נכון.
- (8) א. לא נכון. ב. נכון. ג. נכון. ד. לא נכון. ה. נכון.
ו. לא נכון. ז. נכון. ח. נכון. ט. לא נכון. י. נכון.
- (9) הוכחה.

הרכבת פונקציות

שאלות

1) חשבו את ההרכבה $f \circ g$ ו- $g \circ f$ במקרה שהן מוגדרות עבור הפונקציות הנתונות.

$$f(x) = 2^{x^2-1} \quad g(x) = 3x+7 \quad f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{א.}$$

$$f(A) = A \cap \mathbb{N} \quad g(A) = \bar{A} \quad f, g: P(\mathbb{R}) \rightarrow P(\mathbb{R}) \quad \text{ב.}$$

$$f(n) = \text{The sum of } n\text{'s digits} \quad g(n) = 10n \quad f, g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \quad \text{ג.}$$

$$f(x) = \begin{cases} 7 & x < 3 \\ 8 & x \geq 3 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 5 & x \geq 1 \\ 2 & x < 1 \end{cases} \quad f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{ד.}$$

$$f(x) = 2x-1 \quad g(x) = \begin{cases} 2x-1 & x \leq 3 \\ x & x > 3 \end{cases} \quad f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{ה.}$$

2) חשבו את ההרכבה הבאה:

א. נגדיר $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ באופן הבא:

$$f(x) = \begin{cases} 4x+3 & x < 5 \\ 2x & x \geq 5 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} 3 & x \geq 1 \\ 2 & x < 1 \end{cases}$$

חשבו $g \circ f$.

ב. עבור $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 3x+1 & x \geq 1 \\ 4-3x & x < 1 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} x+3 & x < 2 \\ 2x-1 & x \geq 2 \end{cases}$$

חשבו $f \circ g$.

3) בדקו את השוויון $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$ עבור הפונקציות הבאות:

$$f(x) = 2x+3, \quad g(x) = 2x+3, \quad h(x) = 2x+3 \quad f, g, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{א.}$$

$$f(x) = 3^{x^2-7}, \quad g(x) = x^3+1, \quad h(x) = \frac{2}{\sqrt{|x|}+3} \quad f, g, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{ב.}$$

$$f(A) = A \cap \mathbb{N}, \quad g(A) = \bar{A}, \quad h(A) = A \Delta \mathbb{Z} \quad f, g, h: P(\mathbb{R}) \rightarrow P(\mathbb{R}) \quad \text{ג.}$$

שאלת חזרה

יהיו f ו- g פונקציות מ- \mathbb{N} ל- \mathbb{N} המוגדרות כך: $f(n) = \begin{cases} \frac{n+1}{2} & n \text{ odd} \\ n-1 & n \text{ even} \end{cases}$

וכן לכל $n \in \mathbb{N}$, $g(n) = 2n - 1$.

הוכיחו או הפריכו:

א. f היא חח"ע.

ב. g חח"ע.

ג. f על \mathbb{N} .

ד. g על \mathbb{N} .

ה. $f \circ g$ היא פונקציית הזהות על \mathbb{N} .

ו. $g \circ f$ היא פונקציית הזהות על \mathbb{N} .

(4) תהי $f: A \rightarrow B$ פונקציה הוכיחו כי $f \circ I_A = f$, $I_B \circ f = f$.
הסיקו כי לכל $f: A \rightarrow A$ מתקיים $f \circ I_A = I_A \circ f = f$ זה מראה כי פונקציית הזהות מתנהגת כמו 1 בכפל.

(5) תהיינה $f: C \rightarrow D$, $g: B \rightarrow C$, $h: A \rightarrow B$ שלוש פונקציות.
הוכיחו כי $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.
המשמעות של תכונה זו היא שאפשר למקם סוגרים כרצוננו בדיוק כמו בכפל וחיבור רגילים.

6) תהי $f : A \rightarrow A$.

הוכיחו את הזהויות הבאות.

הערה: בשני הסעיפים האחרונים נתון כי f הפיכה.

א. $f^m \circ f^k = f^{m+k}$

ב. $f^5 \circ f^{-2} = f^{5-2} = f^3$ $f^2 \circ f^{-5} = f^{2-5} = f^{-3}$

ג. הסק מסעיף קודם כי $f^m \circ f^{-k} = f^{m-k}$ והסק כי $f^0 = I$

ד. $(f^m)^k = (f^m)^k = f^{mk}$

ה. $(f^{-1})^{-1} = f$

ו. $(f^{-1})^n = (f^n)^{-1}$

7) תהיינה $f, g : A \rightarrow A$.

הוכיחו כי $\text{Im } f \circ g \subseteq \text{Im } f$ ותנו דוגמה לפונקציות עבורן ההכלה היא הכלה ממש.

8) הוכיחו או הפריכו:

א. אם g היא פונקציה על אז $\text{Im } f \circ g = \text{Im } f$.

ב. אם $\text{Im } f \circ g = \text{Im } f$ אז g היא פונקציה על.

9) תהי \mathbb{N} הטבעיים ותהי $B \subseteq \mathbb{N}$ תת קבוצה סופית לא ריקה נתונה.

נגדיר $f : P(\mathbb{N}) \rightarrow P(\mathbb{N})$ באופן הבא:

$$f(X) = \begin{cases} X \cap B^c & X \cap B \neq \emptyset \\ X \cup B & X \cap B = \emptyset \end{cases}$$

לדוגמה, עבור $B = \{1, 2\}$ מתקיים: $f(\{2, 3\}) = \{3\}$, $f(\{3, 4\}) = \{1, 2, 3, 4\}$.

א. הוכיחו כי אם $X \cap B = \emptyset$ אז $f(f(X)) = X$.

ב. הוכיחו כי אם $B \subseteq X$ אז $f(f(X)) = X$.

ג. הוכיחו כי אם X שייכת לתמונה של הפונקציה אז $f(f(X)) = X$.

ד. האם הפונקציה חח"ע?

ה. האם הפונקציה על?

10 תהי A קבוצה ו- B תת קבוצה החלקית ממש ל- A . נתונות הפונקציות

$$\begin{aligned} g(X) &= X \cap B \\ f(X) &= A - X \end{aligned} \quad f, g: P(A) \rightarrow P(A)$$

הוכיחו או הפריכו: $f \circ g$ על.

11 הוכיחו או הפריכו:

הפונקציה $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, המוגדרת על-ידי $f((x, y)) = (3x + 4y, 4x + 5y)$, היא פונקציה הפיכה.

12 נגדיר פונקציה $h: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ כך: $h(x) = 2x$

הוכיחו כי $\{f \circ h \mid f \in \mathbb{N}^{\mathbb{Z}}\} = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

13 מצאו $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ שאינה פונקציה קבועה ואינה זהות כך ש- $f \circ f = f$.

14 נתונות שלוש פונקציות $f, g, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

הוכיחו כי אם $f \circ g$ חח"ע וגם $g \circ h$ חח"ע וגם $h \circ f$ חח"ע, אז f, g, h שלושתן הפיכות.

15 תהינה $f: B \rightarrow C, g: A \rightarrow B$ שתי פונקציות (בתנאים אלו $f \circ g: A \rightarrow C$).

הוכיחו או הפריכו (במקרה של הפרכה בחרו $A = B = C = \mathbb{N}$):

א. אם f חח"ע וגם g חח"ע אז $f \circ g$ חח"ע.

ב. אם $f \circ g$ חח"ע אז f חח"ע.

ג. אם $f \circ g$ חח"ע אז g חח"ע.

ד. אם f על וגם g על אז $f \circ g$ על.

ה. אם $f \circ g$ על אז f על.

ו. אם $f \circ g$ על אז g על.

ז. אם $f \circ g$ חח"ע וגם g על אז f חח"ע.

ח. אם $f \circ g$ על וגם f חח"ע אז g על.

ט. אם f לא חח"ע וגם g לא על אז $f \circ g$ לא חח"ע או $f \circ g$ לא על.

16 תהי A קבוצה כלשהי ותהיינה $f, g, h: A \rightarrow A$.
 הוכיחו או הפריכו:

- א. אם $g = h$ אז $g \circ f = h \circ f$.
 ב. אם $g \circ f = h \circ f$ וגם f על אז $g = h$.
 ג. אם $g \circ f = h \circ f$ וגם f חח"ע אז $g = h$.
 ד. אם $f \circ g = f \circ h$ אז $g = h$.
 ה. אם $f \circ g = f \circ h$ וגם f חח"ע אז $g = h$.
 ו. אם $f \circ g = f \circ h$ וגם f על אז $g = h$.

17 תהי A קבוצה ותהי $f: A \rightarrow A$ פונקציה.
 הוכיחו או הפריכו:

- א. אם $f \circ f = f$ אז $f = I$.
 ב. אם $f \circ f = f$ אז $f = I$ או ש- f היא פונקציה קבועה.
 ג. אם $f \circ f = f$ וגם f חח"ע אז $f = I$.
 ד. אם $f \circ f = f$ וגם f על אז $f = I$.

18 יהיו $f, g, h: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ הפריכו (שאלה קשה מאוד):

- א. אם $f \circ g = f \circ h$ וגם f על וגם g, h חח"ע וגם אז $g = h$.
 ב. אם $g \circ f = h \circ f$ וגם f חח"ע וגם g, h על אז $g = h$.
 ג. אם $f \circ f = I$ או $f \circ f \circ f = I$.
 ד. אם $f \circ f \circ f = f \circ f$ אז $f \circ f = f$.

תשובות סופיות

השאלות בנושא זה הן שאלות הוכחה, ראו תשובות מפורטות באתר.