# לוגיקה ותורת הקבוצות

## פרק 3 - פונקציות

### תוכן העניינים

1. מבוא והגדרות ראשונות ..... 1
2. תמונה של קבוצה ..... 6
3. הרכבת פונקציות והפונקציה ההפוכה ..... 10

# מבוא לפונקציות:

## שאלות:

**1)** בכל אחד מהאיורים הבאים זהה את התחום ואת הטווח ובחר את האפשרות המתאימה:

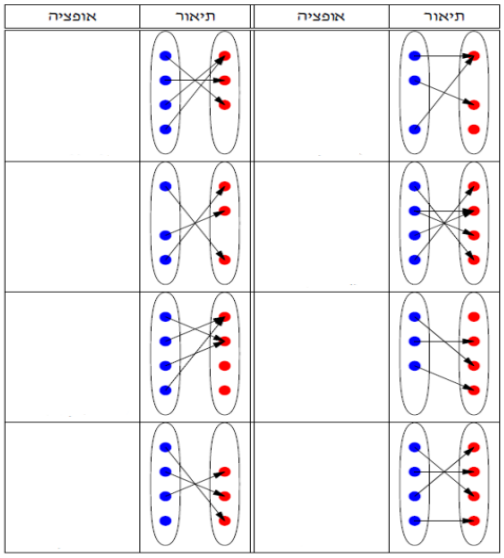
א. זו אינה פונקציה.

ב. זו פונקציה חח"ע שאינה על.

ג. זו פונקציה על שאינה חח"ע.

ה. זו פונקציה שאינה חח"ע ואינה על.

ו. זו פונקציה שהיא גם חח"ע וגם על.




**2)** עבור הפונקציה $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ מוגדרת ע"י $g(x)=\lfloor x\rfloor$ (ערך שלם תחתון של $x$).
חשב את:

א. $g(\pi)\,,\,g(-\pi)$

ב. $\mathrm{Im}(g)$

ג. מצא מקור ל-7-.

ד. מצא את כל המקורות ל-7-.

ה. האם כל איבר בטווח הוא גם תמונה?

**3)** עבור כל אחת מהפונקציות הבאות, קבע האם היא חח"ע? האם על? הוכח טענותיך.

א. פונקציית הזהות $I_A:A\to A$ המוגדרת ע"י $I_A(x)=x$.

ב. $h_1:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ מוגדרת ע"י $h_1(x)=2x+1$.

ג. $h_2:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ מוגדרת ע"י $g(x)=\lfloor x\rfloor$ (ערך שלם תחתון של $x$).

ד. $h_3:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$ מוגדרת ע"י $h_3(x,y)=x-y$.

ה. $h_4:P(\mathbb{N})\times P(\mathbb{N})\to P(\mathbb{N})$ מוגדרת ע"י $h_4(A,B)=A\cup B$ וחשב את $Im\,h_4$.

ו. $f_1:(0,\infty)\to(0,2)$ מוגדרת ע"י $f_1(x)=\dfrac{2x}{x+3}$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
שיעורים פרטיים ליחידים וקבוצות – טל פלדמן : 054-7599493 ©

ז. $f_2:(0,\infty)\to(0,\infty)$ מוגדרת ע"י $f_2(x)=x+\frac{1}{x}$.

ח. $f_3:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ מוגדרת ע"י $f_3(x)=x-\frac{1}{x}$.

ט. $f_4:P(\mathbb{R})\to P(\mathbb{R})$ מוגדרת ע"י $f_4(X)=X\cap\mathbb{Z}$.

י. $f_5:P(\mathbb{R})\to P(\mathbb{Z})$ מוגדרת ע"י $f_5(X)=X\cap\mathbb{Z}$.

יא. $f_6:P(\mathbb{R})\to P(\mathbb{R})$ מוגדרת ע"י $f_6(X)=X\Delta\mathbb{Z}$.

יב. $f_7:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ מוגדרת ע"י $f_7(n)=the\,sum\,of\,the\,digits\,of\,n$.

יג. $f_8:\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ מוגדרת ע"י $f_8(\langle x,y\rangle)=3x+2y$.

יד. $f_9:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ מוגדרת ע"י $f_9(\langle n,k\rangle)=2^{n-1}(2k-1)$.

טו. $h:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ מוגדרת ע"י $h(n)=\begin{cases}\frac{n}{2} & n\in\mathbb{N}_{even}\\ n+3 & n\in\mathbb{N}_{odd}\end{cases}=\begin{cases}\frac{n}{2} & n\in\mathbb{N}_{even}\\ n+3 & else\end{cases}$.

**4)** בדוק אם הפונקציות הבאות חח"ע, על וחשב את תמונתן:

א. $f_9:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ מוגדרת ע"י $f_9(x)=\begin{cases}\frac{n}{2} & 4|n\\ 2n+1 & else\end{cases}$ וחשב את $Im\,f_9$.

ב. $f_{10}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ מוגדרת ע"י $f_{10}(x)=\begin{cases}3x-1 & x<2\\ x-3 & x\geq 2\end{cases}$ וחשב את $Im\,f_{10}$.

ג. $f_{11}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ מוגדרת ע"י $f_{11}(x)=\begin{cases}x+1 & x\leq 1\\ \frac{1}{2}x+\frac{3}{2} & x>1\end{cases}$.

**5)** תהיינה $f,g:A\to A$ פונקציה. הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות:

א. אם לכל איבר ב-$Im(f)$ יש מקור יחיד אז $f$ חח"ע.

ב. אם לכל איבר ב-$Im(f)$ יש מקור יחיד אז $f$ על.

ג. אם לכל איבר ב-$Im(f)$ יש מקור יחיד אז $f$ אינה קבועה.

ד. אם יש איבר ב-$Im(f)$ ללא מקור אז $f$ על.

ה. אם $Im(f)\subset Im(g)$ (הכלה ממש) אז $f$ אינה על.

ו. אם $Im(f)\subset Im(g)$ (הכלה ממש) אז $g$ אינה על.

ז. אם $Im(f)=Im(g)$ אז $f=g$.

ח. לכל $D\subseteq A$, $D\neq\varnothing$ קיימת $f:A\to A$ כך ש-$Im(f)=D$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
שיעורים פרטיים ליחידים וקבוצות – טל פלדמן: 054-7599493 ©

**6)** נתונה $g:\mathbb{N}_{odd}\to\mathbb{N}$ פונקציה לא ידועה.

נגדיר $h:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ באופן הבא: $h(n)=\begin{cases}\frac{n}{2} & n\in\mathbb{N}_{even}\\ g(n) & n\in\mathbb{N}_{odd}\end{cases}$,

למשל: $h(34)=17$ , $h(35)=g(35)$ שהוא מספר טבעי לא ידוע.

הוכח כי $h$ אינה חח"ע.

מצא אינסוף מספרים טבעיים שונים $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ כך שלכל $i\neq j$ מתקיים $h(x_i)=h(x_j)$.

**7)** נגדיר $F:(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}\times P(\mathbb{R}))\to P(\mathbb{R})$ באופן הבא: $F((f,A))=\{x\in\mathbb{R}\mid\exists y\in A\ f(y)=x\}$.

א. עבור $A=\{2,3,4,5,17,18\}$ , $g(x)=2x$, חשב: $F((g,A))$.

ב. בדוק האם $f$ חח"ע והאם על.

ג. מצא את $\mathrm{Im}(F)$.

**8)** נגדיר $G:\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\to P(\mathbb{N})$ באופן הבא: $G(f)=\{\alpha\in\mathbb{N}\mid\exists\beta\in\mathbb{N}\quad f(\beta)=\alpha\}$.

א. חשב $G(f)$ עבור $f=I_{\mathbb{N}}$ פונקציית הזהות $\mathbb{N}$ עבור

הפונקציה $f(n)\begin{cases}1 & n\in\mathbb{N}_{even}\\ 4 & else\end{cases}$ ועבור הפונקציה הקבועה 3.

ב. בדוק האם $G$ חח"ע והאם על ומצא את $Im(G)$.

**9)** נגדיר פונקציה $F:\{0,1\}^{\mathbb{N}}\to P(\{0,1\}\times\{0,1\})$ באופן הבא:

$F(g)=\{(g(n),g(n+1))\mid n\in\mathbb{N}\}$. הוכח כי $F$ אינה על.

**10)** נגדיר $F:\mathbb{N}^{\mathbb{R}}\to P(\mathbb{N})$ באופן הבא: $F(f)=\{n\in\mathbb{R}\mid f(x)=1\}$.

הוכח כי $F$ אינה חח"ע.

**11)** נגדיר פונקציה $F:\{0,1,2\}^{\mathbb{N}}\to P(\mathbb{N})$ באופן הבא: $F(f)=\{n\in\mathbb{N}\mid f(n)=0\}$.

קבע האם $F$ חח"ע ועל.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
שיעורים פרטיים ליחידים וקבוצות – טל פלדמן : 054-7599493 ©

**12)** תהי $P_{even}(\mathbb{N})$ קבוצת כל תת הקבוצות של $\mathbb{N}$ שמספר אבריהן זוגי.
ותהי $P_{odd}(\mathbb{N})$ קבוצת כל התת הקבוצות של $\mathbb{N}$ שמספר אבריהן אי זוגי.
לדוגמה $\{1,3\}\in P_{even}(\mathbb{N}),\{1,3\}\notin P_{odd}(\mathbb{N})$ ולעומת זאת ,
$\{2,4,6\}\notin P_{even}(\mathbb{N}),\{2,4,6\}\in P_{odd}(\mathbb{N})$. לכל קבוצה $A$ סופית של טבעיים נסמן
ב-$\max(A)$ את המספר הגדול ביותר ב-$A$ וב-$\max(\varnothing)=0$.
הוכיחו כי הפונקציה $f:P_{even}(\mathbb{N})\to P_{odd}(\mathbb{N})$ המוגדרת על ידי $f(A)=A\cup\max(A)$
היא חח"ע אך אינה על.

**13)** נגדיר $H:\mathbb{R}^{\mathbb{R}}\times\mathbb{R}^{\mathbb{R}}\to P(\mathbb{R})$ באופן הבא: $H(\langle f,g\rangle)=\operatorname{Im} f\,\Delta\operatorname{Im} g$.
בדוק אם $f$ חח"ע ועל.

**פונקציות שחובה להכיר:**

**14)** בכל אחד מהסעיפים הבאים מצא פונקציה כנדרש:

א. מצא $f:(0,1)\to(1,\infty)$ שהיא חח"ע ועל.

ב. השתמש בפונקציה שמצאת בסעיף קודם כדי למצוא $f:(0,1)\to(0,\infty)$ שהיא חח"ע ועל.

ג. מצא $f:[2,5)\to[1,7)$ שהיא חח"ע ועל.

ד. עבור $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ מספרים נתונים מצא $f:[a,b]\to[c,d]$ שהיא חח"ע ועל.

ה. מצא $f:[1,3)\cup[4,8]\to[0,1]$ שהיא חח"ע ועל.

ו. מצא פונקציה $f:\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$ שהיא חח"ע ועל. מצא גם $g:\mathbb{Z}\to\mathbb{N}$ שהיא היפוך החיצים לפונקציה $f:\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$ שמצאת.

ז. מצא פונקציה $f:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ שהיא חח"ע ועל.

ח. מצא פונקציה $f:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ שהיא חח"ע.

ט. מצא $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ שהיא על. (רמז: סעיף קודם)

י. מצא פונקציה $f:\underbrace{\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\cdots\times\mathbb{N}}_{7}\to\mathbb{N}$ (כלומר $f:\mathbb{N}^7\to\mathbb{N}$) שהיא חח"ע.

יא. מצא פונקציה $f:\mathbb{N}\times[0,1)\to[0,\infty)$ שהיא חח"ע ועל.
מצא גם $g:[0,\infty)\to\mathbb{N}\times[0,1)$ שהיא היפוך החיצים לפונקציה שמצאת.

יב. מצא פונקציה $f:(0,1]\to(0,1)$ שהיא חח"ע ועל.

יג. מצא $F:[0,1)\times[0,1)\to[0,1)$ חח"ע ועל.

יד. מצא פונקציה $f:\mathbb{N}\times\{0,1\}\to\mathbb{N}$ שהיא חח"ע ועל.
מצא גם $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}\times\{0,1\}$ שהיא היפוך החיצים לפונקציה שמצאת.

טו. מצא $f:\mathbb{R}\to(-1,1)$ שהיא חח"ע ועל.

טז. מצא $F:\{0,1\}^A\to P(A)$ חח"ע ועל. הוכח כי הפונקציה שמצאת היא אכן חח"ע ועל.

יז. מצא $F:\{0,1\}^{\mathbb{N}_{even}}\times\{0,1\}^{\mathbb{N}_{odd}}\to\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ שהיא חח"ע ועל.

יח. מצא $F:\left(\{0,1\}^{\mathbb{N}}\right)^2\to\{0,1,2,3\}^{\mathbb{N}}$ כלומר $F:\{0,1\}^{\mathbb{N}}\times\{0,1\}^{\mathbb{N}}\to\{0,1,2,3\}^{\mathbb{N}}$ שהיא חח"ע ועל והוכח שהיא חח"ע ועל.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
שיעורים פרטיים ליחידים וקבוצות – טל פלדמן : 054-7599493 ©

# תמונה של קבוצה:

## רקע:

צפה בשיעורים בנושא תמונה ותמונה הפוכה של קבוצה בטרם תענה על השאלות שבנושא זה.

$t \in f(D) \Leftarrow$ (x קיים $\alpha \in D$ כך ש- $f(\alpha)=t$

(y $f(\alpha) \in f(D) \Leftarrow \alpha \in D$

(z $F(\alpha) \in E \Leftrightarrow \alpha \in f^{-1}(E)$

## שאלות:

**1)** נגדיר $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ מוגדרת ע"י: $g(n)=2n$ $K=\{1,8,17\}$.

חשב את הקבוצות הבאות:

א. $g(K)$

ב. $g^{-1}(K)$

ג. $g(\mathbb{N})$

ד. $g(\mathbb{N}_{evev})$

ה. $g(\mathbb{N}_{odd})$

ו. $g^{-1}(\mathbb{N}_{evev})$

ז. $g^{-1}(\mathbb{N}_{odd})$

**2)** נגדיר $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ מוגדרת ע"י: $f(x)=x^2-5x+4$ $M=\{0,4\}$.

נגדיר $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ מוגדרת ע"י: $f(n)=\begin{cases}2n & n\in\mathbb{N}_{even}\\ 1 & else\end{cases}$ ותהי $E=\{1,5,6,8\}$.

חשב את הקבוצות הבאות:

א. $f^{-1}(f(M))$

ב. $f(f^{-1}(M))$

ג. $f(f^{-1}(\{-3,4\}))$

ד. $f(f^{-1}(\{-3\}))$

ה. $f(f^{-1}(E))$

**3)** תהי $f:A\to B$ פונקציה ותהינה $D\subseteq A\ ,\ E\subseteq B$ שתי קבוצות.
הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות:

א. $f(D)=D$

ב. $f(D)\neq D$

ג. $f^{-1}(E)=E$

ד. $f^{-1}(E)\neq E$

ה. $f(D)\subseteq f(A)$

ו. אם $D\subset A$ אז $f(D)\subset f(A)$ (שים ♥ שההכלות בסעיף זה הן הכלות ממש).

ז. $f^{-1}(E)\subseteq A$

ח. אם $E\subset B$ אז $f^{-1}(E)\subset A$ (שים ♥ שההכלות בסעיף זה הן הכלות ממש).

ט. $f$ על אס"ם לכל $y\in B$ מתקיים: $f^{-1}(\{y\})\neq\varnothing$.

י. $f$ חח"ע אס"ם לכל $y\in A$ מתקיים: $f^{-1}(\{y\})$ ריקה או בעלת איבר אחד.

**4)** בשאלה זו נבחן את השוויון: $f(D_1\cup D_2)=f(D_1)\cup f(D_2)$.

א. אשר את השוויון עבור $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ מוגדרת ע"י: $f(x)=x^2$.

$D_1=\{2,5\}\quad D_2=\{-2,4\}$

ב. הוכח כי שוויון זה מתקיים תמיד.

כלומר: תהי $f:A\to B$ פונקציה ותהינה $D_1\ ,\ D_2\subseteq A$.

הוכח כי: $f(D_1\cup D_2)=f(D_1)\cup f(D_2)$.

**5)** $f:A\to B$ פונקציה ותהינה $D_1\ ,\ D_2\subseteq A$.
הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות:

א. $f(D_1\cap D_2)\subseteq f(D_1)\cap f(D_2)$

ב. $f(D_1\cap D_2)\supseteq f(D_1)\cap f(D_2)$

ג. אם $f$ חח"ע אז $f(D_1\cap D_2)=f(D_1)\cap f(D_2)$.

ד. אם $f$ על אז $f(D_1\cap D_2)=f(D_1)\cap f(D_2)$.

ה. אם $f(D_1\cap D_2)\neq f(D_1)\cap f(D_2)$ אז $f$ אינה חח"ע.

**6)** $f:A\to B$ פונקציה ותהינה $E_1\ ,\ E_2\subseteq B$.
הוכח כל אחת מהטענות הבאות:

א. $f^{-1}(E_1\cap E_2)=f^{-1}(E_1)\cap f^{-1}(E_2)$

ב. $f^{-1}(E_1\cup E_2)=f^{-1}(E_1)\cup f^{-1}(E_2)$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
שיעורים פרטיים ליחידים וקבוצות – טל פלדמן: 054-7599493 ©

**7)** $f:A\to B$ פונקציה ותהי $D\subseteq A$.
הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות:

א. $f^{-1}\left(f(D)\right)\subseteq D$

ב. $f^{-1}\left(f(D)\right)\supseteq D$

ג. אם $f$ חח"ע אז $f^{-1}\left(f(D)\right)=D$.

ד. אם $f$ לא חח"ע אז $f^{-1}\left(f(D)\right)\neq D$.

ה. אם $f$ על אז $f^{-1}\left(f(D)\right)=D$.

ו. אם לכל $D\subseteq A$ מתקיים $f^{-1}\left(f(D)\right)=D$ אז $f$ על.

ז. אם $f^{-1}\left(f(D)\right)=D$ אז $f$ חח"ע.

ח. אם לכל $D\subseteq A$ מתקיים $f^{-1}\left(f(D)\right)=D$ אז $f$ חח"ע.

ט. אם $f^{-1}\left(f(D)\right)\neq D$ אז $f$ אינה חח"ע.

י. אם $f$ על אז לכל $D\subseteq A$ מתקיים $f^{-1}\left(f(D)\right)=D$.

יא. אם $f$ לא על אז קיימת $D\subseteq A$ עבורה $f^{-1}\left(f(D)\right)\neq D$.

יב. אם $f$ לא חח"ע אז קיימת $D\subseteq A$ עבורה $f^{-1}\left(f(D)\right)\neq D$.

**8)** $f:A\to B$ פונקציה ותהי $E\subseteq B$ הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות:

א. $f\left(f^{-1}(E)\right)\subseteq E$

ב. $f\left(f^{-1}(E)\right)\supseteq E$

ג. $f\left(f^{-1}(E)\right)\subseteq E$ או $f\left(f^{-1}(E)\right)\supseteq E$.

ד. אם $f$ חח"ע אז $f\left(f^{-1}(E)\right)=E$.

ה. אם $f$ על אז $f\left(f^{-1}(E)\right)=E$.

ו. אם לכל $E\subseteq B$ מתקיים $f\left(f^{-1}(E)\right)=E$ אז $f$ חח"ע.

ז. אם לכל $E\subseteq B$ מתקיים $f\left(f^{-1}(E)\right)=E$ אז $f$ על.

ח. אם לא לכל $E\subseteq B$ מתקיים $f\left(f^{-1}(E)\right)=E$ אז $f$ לא על.

ט. אם לכל $E\subseteq B$ מתקיים $f\left(f^{-1}(E)\right)=E$ אז $f$ היא פונקציית הזהות.

י. אם קיימת $E\subseteq B$ כך ש- $f\left(f^{-1}(E)\right)\neq E$ אז קיים $\alpha\in A$ כך שלכל $\beta\in A$ מתקיים: $f(\beta)\neq\alpha$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
שיעורים פרטיים ליחידים וקבוצות – טל פלדמן: 054-7599493 ©

**9)** נתונות פונקציה $f:A\to B$ וקבוצות $C,D\subseteq A$.

א. הוכח כי: $f(C\cap D)\subseteq f(C)\cap f(D)$.

ב. הוכח שאם $f$ היא חד-חד-ערכית אז $f(C\cap D)=f(C)\cap f(D)$.

ג. הדגם קבוצות $C,D\subseteq\mathbb{N}$ ופונקציה $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ כך ש- $f$ על וגם $f(C\cap D)\subset f(C)\cap f(D)$.

ד. הוכח כי: $f(C\cup D)=f(C)\cup f(D)$.

## תשובות סופיות:

**1)** א. $\{2,16,18\}$ ב. $\{4\}$ ג. $\{4n|n\in\mathbb{N}\}$ ד. ראה סרטון.
ה. $\{4n+2|n\in\mathbb{N}\}$ ו. $\mathbb{N}$ ז. $\varnothing$

**2)** א. $\{0,1,4,5\}$ ב. $\{0,4\}$ ג. $\{0,4\}$ ד. $\varnothing$ ה. $\{1,8\}$

**3)** א. לא נכון. ב. לא נכון. ג. לא נכון. ד. לא נכון. ה. נכון.
ו. לא נכון. ז. נכון. ח. לא נכון. ט. נכון. י. נכון.

**4)** הוכחה.

**5)** א. נכון. ב. לא נכון. ג. נכון. ד. לא נכון. ה. נכון.

**6)** הוכחה.

**7)** א. לא נכון. ב. נכון. ג. נכון. ד. לא נכון. ה. לא נכון.
ו. לא נכון. ז. לא נכון. ח. נכון. ט. נכון. י. לא נכון.
יא. לא נכון. יב. לא נכון.

**8)** א. לא נכון. ב. נכון. ג. נכון. ד. לא נכון. ה. נכון.
ו. לא נכון. ז. נכון. ח. נכון. ט. לא נכון. י. נכון.

**9)** הוכחה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
שיעורים פרטיים ליחידים וקבוצות – טל פלדמן: 054-7599493 ©

# הרכבת פונקציות

## שאלות

**1)** חשבו את ההרכבה $f\circ g$ ו- $g\circ f$ במקרה שהן מוגדרות עבור הפונקציות הנתונות.

א. $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\quad g(x)=3x+7 \quad f(x)=2^{x^2-1}$

ב. $f,g:P(\mathbb{R})\to P(\mathbb{R})$ $\quad g(A)=\bar{A} \quad f(A)=A\cap\mathbb{N}$

ג. $f,g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ $\quad g(n)=10n \quad f(n)=\text{The sum of } n\text{'s digits}$

ד. $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\quad g(x)=\begin{cases}5 & x\ge 1\\ 2 & x<1\end{cases} \quad f(x)=\begin{cases}7 & x<3\\ 8 & x\ge 3\end{cases}$

ה. $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\quad g(x)=\begin{cases}2x-1 & x\le 3\\ x & x>3\end{cases} \quad f(x)=2x-1$

**2)** חשבו את ההרכבה הבאה:

א. נגדיר $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ באופן הבא:

$$g(x)=\begin{cases}3 & x\ge 1\\ 2 & x<1\end{cases},\ f(x)=\begin{cases}4x+3 & x<5\\ 2x & x\ge 5\end{cases}.$$

חשבו $g\circ f$.

ב. עבור $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$g(x)=\begin{cases}x+3 & x<2\\ 2x-1 & x\ge 2\end{cases},\ f(x)=\begin{cases}3x+1 & x\ge 1\\ 4-3x & x<1\end{cases}.$$

חשבו $f\circ g$.

**3)** בדקו את השוויון $f\circ(g\circ h)=(f\circ g)\circ h$ עבור הפונקציות הבאות:

א. $f,g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\quad f(x)=2x+3\ ,\ g(x)=2x+3\ ,\ h(x)=2x+3$

ב. $f,g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\quad f(x)=3^{x^2-7}\ ,\ g(x)=x^3+1\ ,\ h(x)=\dfrac{2}{\sqrt{|x|}+3}$

ג. $f,g,h:P(\mathbb{R})\to P(\mathbb{R})$ $\quad f(A)=A\cap\mathbb{N}\ ,\ g(A)=\bar{A}\ ,\ h(A)=A\triangle\mathbb{Z}$


כתב ופתר – טל פלדמן ©

**שאלת חזרה**

יהיו $f$ ו- $g$ פונקציות מ- $\mathbb{N}$ ל- $\mathbb{N}$ המוגדרות כך: $f(n)=\begin{cases}\frac{n+1}{2} & n \text{ odd}\\ n-1 & n \text{ even}\end{cases}$,

וכן לכל $n\in\mathbb{N}$, $g(n)=2n-1$.

הוכיחו או הפריכו:

א. $f$ היא חח"ע.

ב. $g$ חח"ע.

ג. $f$ על $\mathbb{N}$.

ד. $g$ על $\mathbb{N}$.

ה. $f\circ g$ היא פונקציית הזהות על $\mathbb{N}$.

ו. $g\circ f$ היא פונקציית הזהות על $\mathbb{N}$.

**4)** תהי $f:A\to B$ פונקציה הוכיחו כי $I_B\circ f=f$ , $f\circ I_A=f$.
הסיקו כי לכל $f:A\to A$ מתקיים $f\circ I_A=I_A\circ f=f$ זה מראה כי פונקציית הזהות מתנהגת כמו 1 בכפל.

**5)** תהיינה $h:A\to B$ , $g:B\to C$ , $f:C\to D$ שלוש פונקציות.
הוכיחו כי $(f\circ g)\circ h=f\circ(g\circ h)$.
המשמעות של תכונה זו היא שאפשר למקם סוגרים כרצוננו בדיוק כמו בכפל וחיבור רגילים.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – טל פלדמן ©

**6)** תהי $f:A\to A$.
הוכיחו את הזהויות הבאות.
הערה: בשני הסעיפים האחרונים נתון כי $f$ הפיכה.

א. $f^m\circ f^k=f^{m+k}$

ב. $f^2\circ f^{-5}=f^{2-5}=f^{-3}$ $\qquad$ $f^5\circ f^{-2}=f^{5-2}=f^3$

ג. הסק מסעיף קודם כי $f^m\circ f^{-k}=f^{m-k}$ והסק כי $f^0=I$

ד. $\left(f^m\right)^k=\left(f^m\right)^k=f^{mk}$

ה. $\left(f^{-1}\right)^{-1}=f$

ו. $\left(f^{-1}\right)^n=\left(f^n\right)^{-1}$

**7)** תהיינה $f,g:A\to A$.
הוכיחו כי $\operatorname{Im} f\circ g\subseteq \operatorname{Im} f$ ותנו דוגמה לפונקציות עבורן ההכלה היא הכלה ממש.

**8)** הוכיחו או הפריכו:

א. אם $g$ היא פונקציה על אז $\operatorname{Im} f\circ g=\operatorname{Im} f$.

ב. אם $\operatorname{Im} f\circ g=\operatorname{Im} f$ אז $g$ היא פונקציה על.

**9)** תהי $\mathbb{N}$ הטבעיים ותהי $B\subseteq\mathbb{N}$ תת קבוצה סופית לא ריקה נתונה.
נגדיר $f:P(\mathbb{N})\to P(\mathbb{N})$ באופן הבא: $f(X)=\begin{cases}X\cap B^C & X\cap B\neq\varnothing\\ X\cup B & X\cap B=\varnothing\end{cases}$.
לדוגמה, עבור $B=\{1,2\}$ מתקיים: $f(\{3,4\})=\{1,2,3,4\}$, $f(\{2,3\})=\{3\}$.

א. הוכיחו כי אם $X\cap B=\varnothing$ אז $f(f(X))=X$.

ב. הוכיחו כי אם $B\subseteq X$ אז $f(f(X))=X$.

ג. הוכיחו כי אם $X$ שייכת לתמונה של הפונקציה אז $f(f(X))=X$.

ד. האם הפונקציה חח"ע?

ה. האם הפונקציה על?


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – טל פלדמן ©

**10)** תהי $A$ קבוצה ו-$B$ תת קבוצה החלקית **<u>ממש</u>** ל-$A$. נתונות הפונקציות $f,g:P(A)\to P(A)$ המוגדרות באופן הבא: $\begin{matrix} g(X)=X\cap B \\ f(X)=A-X \end{matrix}$.

הוכיחו או הפריכו: $f\circ g$ על.

**11)** הוכיחו או הפריכו:

הפונקציה $f;\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, המוגדרת על-ידי $f((x,y))=(3x+4y,4x+5y)$, היא פונקציה הפיכה.

**12)** נגדיר פונקציה $h:\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$ כך: $h(x)=2x$

הוכיחו כי $\{f\circ h \mid f\in\mathbb{N}^{\mathbb{Z}}\}=\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

**13)** מצאו $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ שאינה פונקציה קבועה ואינה זהות כך ש- $f\circ f=f$.

**14)** נתונות שלוש פונקציות $f,g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

הוכיחו כי אם $f\circ g$ חח"ע וגם $g\circ h$ חח"ע וגם $h\circ g\circ f$ על,

אז $f,g,h$ שלושתן הפיכות.

**15)** תהיינה $g:A\to B,\ f:B\to C$ שתי פונקציות (בתנאים אלו $f\circ g:A\to C$).

הוכיחו או הפריכו (במקרה של הפרכה בחרו $A=B=C=\mathbb{N}$):

א. אם $f$ חח"ע וגם $g$ חח"ע אז $f\circ g$ חח"ע.

ב. אם $f\circ g$ חח"ע אז $f$ חח"ע.

ג. אם $f\circ g$ חח"ע אז $g$ חח"ע

ד. אם $f$ על וגם $g$ על אז $f\circ g$ על.

ה. אם $f\circ g$ על אז $f$ על.

ו. אם $f\circ g$ על אז $g$ על.

ז. אם $f\circ g$ חח"ע וגם $g$ על אז $f$ חח"ע.

ח. אם $f\circ g$ על וגם $f$ חח"ע אז $g$ על.

ט. אם $f$ לא חח"ע וגם $g$ לא על אז $f\circ g$ לא חח"ע או $f\circ g$ לא על.


כתב ופתר – טל פלדמן ©

**16)** תהי $A$ קבוצה כלשהי ותהיינה $f,g,h:A\to A$.
הוכיחו או הפריכו:

א. אם $g\circ f=h\circ f$ אז $g=h$.

ב. אם $g\circ f=h\circ f$ וגם $f$ על אז $g=h$.

ג. אם $g\circ f=h\circ f$ וגם $f$ חח"ע אז $g=h$.

ד. אם $f\circ g=f\circ h$ אז $g=h$.

ה. אם $f\circ g=f\circ h$ וגם $f$ חח"ע אז $g=h$.

ו. אם $f\circ g=f\circ h$ וגם $f$ על אז $g=h$.

**17)** תהי $A$ קבוצה ותהי $f:A\to A]$ פונקציה.
הוכיחו או הפריכו:

א. אם $f\circ f=f$ אז $f=I$.

ב. אם $f\circ f=f$ אז $f=I$ או ש- $f$ היא פונקציה קבועה.

ג. אם $f\circ f=f$ וגם $f$ חח"ע אז $f=I$.

ד. אם $f\circ f=f$ וגם $f$ על אז $f=I$.

**18)** יהיו $f,g,h:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ הפריכו (שאלה קשה מאוד):

א. אם $f\circ g=f\circ h$ וגם $f$ על וגם $g,h$ חח"ע וגם אז $g=h$.

ב. אם $g\circ f=h\circ f$ וגם $f$ חח"ע וגם $g,h$ על אז $g=h$.

ג. אם $f\circ f\circ f=I$ אז $f\circ f=I$.

ד. אם $f\circ f\circ f=f\circ f$ אז $f\circ f=f$.

## תשובות סופיות

השאלות בנושא זה הן שאלות הוכחה, ראו תשובות מפורטות באתר.


כתב ופתר – טל פלדמן ©