לוגיקה ותורת הקבוצות (קורס חלקי)

פרק 3 - פונקציות

תוכן העניינים

1. מבוא והגדרות ראשונות 1
2. תמונה של קבוצה 6
3. הרכבת פונקציות והפונקציה ההפוכה 10

מבוא לפונקציות:

שאלות:

1) בכל אחד מהאיורים הבאים זהה את התחום ואת הטווח ובחר את האפשרות המתאימה:

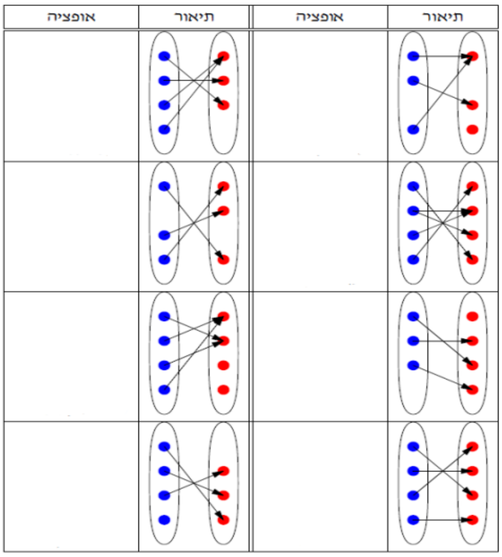
א. זו אינה פונקציה.

ב. זו פונקציה חח"ע שאינה על.

ג. זו פונקציה על שאינה חח"ע.

ה. זו פונקציה שאינה חח"ע ואינה על.

ו. זו פונקציה שהיא גם חח"ע וגם על.



2) עבור הפונקציה $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ מוגדרת ע"י $g(x)=\lfloor x\rfloor$ (ערך שלם תחתון של x).

חשב את:

א. $g(\pi)\,,\,g(-\pi)$

ב. $\operatorname{Im}(g)$

ג. מצא מקור ל-7-.

ד. מצא את כל המקורות ל-7-.

ה. האם כל איבר בטווח הוא גם תמונה?

3) עבור כל אחת מהפונקציות הבאות, קבע האם היא חח"ע? האם על? הוכח טענותיך.

א. פונקציית הזהות $I_A:A\to A$ המוגדרת ע"י $I_A(x)=x$.

ב. $h_1:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ מוגדרת ע"י $h_1(x)=2x+1$.

ג. $h_2:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ מוגדרת ע"י $g(x)=\lfloor x\rfloor$ (ערך שלם תחתון של x).

ד. $h_3:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$ מוגדרת ע"י $h_3(x,y)=x-y$.

ה. $h_4:P(\mathbb{N})\times P(\mathbb{N})\to P(\mathbb{N})$ מוגדרת ע"י $h_4(A,B)=A\cup B$ וחשב את $Im\,h_4$.

ו. $f_1:(0,\infty)\to(0,2)$ מוגדרת ע"י $f_1(x)=\dfrac{2x}{x+3}$.

ז. $f_2:(0,\infty)\to(0,\infty)$ מוגדרת ע"י $f_2(x)=x+\frac{1}{x}$.

ח. $f_3:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ מוגדרת ע"י $f_3(x)=x-\frac{1}{x}$.

ט. $f_4:P(\mathbb{R})\to P(\mathbb{R})$ מוגדרת ע"י $f_4(X)=X\cap\mathbb{Z}$.

י. $f_5:P(\mathbb{R})\to P(\mathbb{Z})$ מוגדרת ע"י $f_5(X)=X\cap\mathbb{Z}$.

יא. $f_6:P(\mathbb{R})\to P(\mathbb{R})$ מוגדרת ע"י $f_6(X)=X\Delta\mathbb{Z}$.

יב. $f_7:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ מוגדרת ע"י $f_7(n)=\text{the sum of the digits of } n$.

יג. $f_8:\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ מוגדרת ע"י $f_8(\langle x,y\rangle)=3x+2y$.

יד. $f_9:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ מוגדרת ע"י $f_9(\langle n,k\rangle)=2^{n-1}(2k-1)$.

טו. $h:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ מוגדרת ע"י $h(n)=\begin{cases}\frac{n}{2} & n\in\mathbb{N}_{even}\\ n+3 & else\end{cases}=\begin{cases}\frac{n}{2} & n\in\mathbb{N}_{even}\\ n+3 & n\in\mathbb{N}_{odd}\end{cases}$.

4) בדוק אם הפונקציות הבאות חח"ע, על וחשב את תמונתן:

א. $f_9:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ מוגדרת ע"י $f_9(x)=\begin{cases}\frac{n}{2} & 4|n\\ 2n+1 & else\end{cases}$ וחשב את $Im\, f_9$.

ב. $f_{10}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ מוגדרת ע"י $f_{10}(x)=\begin{cases}3x-1 & x<2\\ x-3 & x\ge 2\end{cases}$ וחשב את $Im\, f_{10}$.

ג. $f_{11}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ מוגדרת ע"י $f_{11}(x)=\begin{cases}x+1 & x\le 1\\ \frac{1}{2}x+\frac{3}{2} & x>1\end{cases}$.

5) תהיינה $f,g:A\to A$ פונקציה. הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות:

א. אם לכל איבר ב-$Im(f)$ יש מקור יחיד אז f חח"ע.

ב. אם לכל איבר ב-$Im(f)$ יש מקור יחיד אז f על.

ג. אם לכל איבר ב-$Im(f)$ יש מקור יחיד אז f אינה קבועה.

ד. אם יש איבר ב-$Im(f)$ ללא מקור אז f על.

ה. אם $Im(f)\subset Im(g)$ (הכלה ממש) אז f אינה על.

ו. אם $Im(f)\subset Im(g)$ (הכלה ממש) אז g אינה על.

ז. אם $Im(f)=Im(g)$ אז $f=g$.

ח. לכל $D\subseteq A$, $D\neq\varnothing$ קיימת $f:A\to A$ כך ש-$Im(f)=D$.

6) נתונה $g:\mathbb{N}_{odd}\to\mathbb{N}$ פונקציה לא ידועה.

נגדיר $h:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ באופן הבא: $h(n)=\begin{cases}\frac{n}{2} & n\in\mathbb{N}_{even}\\ g(n) & n\in\mathbb{N}_{odd}\end{cases}$,

למשל: $h(34)=17$, $h(35)=g(35)$ שהוא מספר טבעי לא ידוע.

הוכח כי h אינה חח"ע.

מצא אינסוף מספרים טבעיים שונים $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ כך שלכל $i\neq j$ מתקיים $h(x_i)=h(x_j)$.

7) נגדיר $F:(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}\times P(\mathbb{R}))\to P(\mathbb{R})$ באופן הבא: $F((f,A))=\{x\in\mathbb{R}|\exists y\in A\ f(y)=x\}$.

א. עבור $A=\{2,3,4,5,17,18\}$, $g(x)=2x$, חשב: $F((g,A))$.

ב. בדוק האם f חח"ע והאם על.

ג. מצא את $\operatorname{Im}(F)$.

8) נגדיר $G:\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\to P(\mathbb{N})$ באופן הבא: $G(f)=\{\alpha\in\mathbb{N}|\exists\beta\in\mathbb{N}\quad f(\beta)=\alpha\}$.

א. חשב $G(f)$ עבור $f=I_{\mathbb{N}}$ פונקציית הזהות עבור $\mathbb{N}$

הפונקציה $f(n)\begin{cases}1 & n\in\mathbb{N}_{even}\\ 4 & else\end{cases}$ ועבור הפונקציה הקבועה 3.

ב. בדוק האם G חח"ע והאם על ומצא את $Im(G)$.

9) נגדיר פונקציה $P(\{0,1\}\times\{0,1\})\leftarrow F:\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ באופן הבא:

$F(g)=\{(g(n),g(n+1))|n\in\mathbb{N}\}$. הוכח כי F אינה על.

10) נגדיר $F:\mathbb{N}^{\mathbb{R}}\to P(\mathbb{N})$ באופן הבא: $F(f)=\{n\in\mathbb{R}|f(x)=1\}$.

הוכח כי F אינה חח"ע.

11) נגדיר פונקציה $F:\{0,1,2\}^{\mathbb{N}}\to P(\mathbb{N})$ באופן הבא: $F(f)=\{n\in\mathbb{N}|f(n)=0\}$.

קבע האם F חח"ע ועל.

12) תהי $P_{even}(\mathbb{N})$ קבוצת כל תת הקבוצות של $\mathbb{N}$ שמספר אבריהן זוגי.
ותהי $P_{odd}(\mathbb{N})$ קבוצת כל התת הקבוצות של $\mathbb{N}$ שמספר אבריהן אי זוגי.
לדוגמה $\{1,3\}\in P_{even}(\mathbb{N}),\{1,3\}\notin P_{odd}(\mathbb{N})$ ולעומת זאת, $\{2,4,6\}\notin P_{even}(\mathbb{N}),\{2,4,6\}\in P_{odd}(\mathbb{N})$. לכל קבוצה A סופית של טבעיים נסמן ב-$\max(A)$ את המספר הגדול ביותר ב-A וב-$\max(\varnothing)=0$.
הוכיחו כי הפונקציה $f:P_{even}(\mathbb{N})\to P_{odd}(\mathbb{N})$ המוגדרת על ידי $f(A)=A\cup\max(A)$ היא חח"ע אך אינה על.

13) נגדיר $H:\mathbb{R}^{\mathbb{R}}\times\mathbb{R}^{\mathbb{R}}\to P(\mathbb{R})$ באופן הבא: $H(\langle f,g\rangle)=\operatorname{Im} f\,\Delta\operatorname{Im} g$.
בדוק אם f חח"ע ועל.

פונקציות שחובה להכיר:

14) בכל אחד מהסעיפים הבאים מצא פונקציה כנדרש:
א. מצא $f:(0,1)\to(1,\infty)$ שהיא חח"ע ועל.
ב. השתמש בפונקציה שמצאת בסעיף קודם כדי למצוא $f:(0,1)\to(0,\infty)$ שהיא חח"ע ועל.
ג. מצא $f:[2,5)\to[1,7)$ שהיא חח"ע ועל.
ד. עבור $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ מספרים נתונים מצא $f:[a,b]\to[c,d]$ שהיא חח"ע ועל.
ה. מצא $f:[1,3)\cup[4,8]\to[0,1]$ שהיא חח"ע ועל.
ו. מצא פונקציה $f:\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$ שהיא חח"ע ועל. מצא גם $g:\mathbb{Z}\to\mathbb{N}$ שהיא היפוך החיצים לפונקציה $f:\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$ שמצאת.
ז. מצא פונקציה $f:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ שהיא חח"ע ועל.
ח. מצא פונקציה $f:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ שהיא חח"ע.
ט. מצא $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ שהיא על. (רמז: סעיף קודם)
י. מצא פונקציה $f:\underbrace{\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\cdots\times\mathbb{N}}_{7}\to\mathbb{N}$ (כלומר $f:\mathbb{N}^7\to\mathbb{N}$) שהיא חח"ע.
יא. מצא פונקציה $f:\mathbb{N}\times[0,1)\to[0,\infty)$ שהיא חח"ע ועל.
מצא גם $g:[0,\infty)\to\mathbb{N}\times[0,1)$ שהיא היפוך החיצים לפונקציה שמצאת.
יב. מצא פונקציה $f:(0,1]\to(0,1)$ שהיא חח"ע ועל.
יג. מצא $F:[0,1)\times[0,1)\to[0,1)$ חח"ע ועל.
יד. מצא פונקציה $f:\mathbb{N}\times\{0,1\}\to\mathbb{N}$ שהיא חח"ע ועל.
מצא גם $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}\times\{0,1\}$ שהיא היפוך החיצים לפונקציה שמצאת.

טו. מצא $f:\mathbb{R}\to(-1,1)$ שהיא חח"ע ועל.

טז. מצא $F:\{0,1\}^A\to P(A)$ חח"ע ועל. הוכח כי הפונקציה שמצאת היא אכן חח"ע ועל.

יז. מצא $F:\{0,1\}^{\mathbb{N}_{even}}\times\{0,1\}^{\mathbb{N}_{odd}}\to\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ שהיא חח"ע ועל.

יח. מצא $F:\left(\{0,1\}^{\mathbb{N}}\right)^2\to\{0,1,2,3\}^{\mathbb{N}}$ כלומר $F:\{0,1\}^{\mathbb{N}}\times\{0,1\}^{\mathbb{N}}\to\{0,1,2,3\}^{\mathbb{N}}$ שהיא חח"ע ועל והוכח שהיא חח"ע ועל.

תמונה של קבוצה:

רקע:

צפה בשיעורים בנושא תמונה ותמונה הפוכה של קבוצה בטרם תענה על השאלות שבנושא זה.

x) $t \in f(D) \Leftarrow$ קיים $\alpha \in D$ כך ש- $f(\alpha)=t$

y) $\alpha \in D \Leftarrow f(\alpha) \in f(D)$

z) $\alpha \in f^{-1}(E) \Leftrightarrow F(\alpha) \in E$

שאלות:

1) נגדיר $g:\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ מוגדרת ע"י: $g(n)=2n$ $K=\{1,8,17\}$.

חשב את הקבוצות הבאות:

א. $g(K)$

ב. $g^{-1}(K)$

ג. $g(\mathbb{N})$

ד. $g(\mathbb{N}_{evev})$

ה. $g(\mathbb{N}_{odd})$

ו. $g^{-1}(\mathbb{N}_{evev})$

ז. $g^{-1}(\mathbb{N}_{odd})$

2) נגדיר $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ מוגדרת ע"י: $f(x)=x^2-5x+4$ $M=\{0,4\}$.

נגדיר $f:\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ מוגדרת ע"י: $f(n)=\begin{cases} 2n & n \in \mathbb{N}_{even} \\ 1 & else \end{cases}$ ותהי $E=\{1,5,6,8\}$.

חשב את הקבוצות הבאות:

א. $f^{-1}(f(M))$

ב. $f(f^{-1}(M))$

ג. $f(f^{-1}(\{-3,4\}))$

ד. $f(f^{-1}(\{-3\}))$

ה. $f(f^{-1}(E))$

3) תהי $f:A\to B$ פונקציה ותהינה $E\subseteq B$, $D\subseteq A$ שתי קבוצות.
הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות:
א. $f(D)=D$
ב. $f(D)\neq D$
ג. $f^{-1}(E)=E$
ד. $f^{-1}(E)\neq E$
ה. $f(D)\subseteq f(A)$
ו. אם $D\subset A$ אז $f(D)\subset f(A)$ (שים ♥ שההכלות בסעיף זה הן הכלות ממש).
ז. $f^{-1}(E)\subseteq A$
ח. אם $E\subset B$ אז $f^{-1}(E)\subset A$ (שים ♥ שההכלות בסעיף זה הן הכלות ממש).
ט. f על אם"ם לכל $y\in B$ מתקיים: $f^{-1}(\{y\})\neq\varnothing$.
י. f חח"ע אם"ם לכל $y\in A$ מתקיים: $f^{-1}(\{y\})$ ריקה או בעלת איבר אחד.

4) בשאלה זו נבחן את השוויון: $f(D_1\cup D_2)=f(D_1)\cup f(D_2)$.
א. אשר את השוויון עבור $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ מוגדרת ע"י: $f(x)=x^2$.
$D_1=\{2,5\}\quad D_2=\{-2,4\}$
ב. הוכח כי שוויון זה מתקיים תמיד.
כלומר: תהי $f:A\to B$ פונקציה ותהינה $D_1\ ,\ D_2\subseteq A$.
הוכח כי: $f(D_1\cup D_2)=f(D_1)\cup f(D_2)$.

5) $f:A\to B$ פונקציה ותהינה $D_1\ ,\ D_2\subseteq A$.
הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות:
א. $f(D_1\cap D_2)\subseteq f(D_1)\cap f(D_2)$
ב. $f(D_1\cap D_2)\supseteq f(D_1)\cap f(D_2)$
ג. אם f חח"ע אז $f(D_1\cap D_2)=f(D_1)\cap f(D_2)$.
ד. אם f על אז $f(D_1\cap D_2)=f(D_1)\cap f(D_2)$.
ה. אם $f(D_1\cap D_2)\neq f(D_1)\cap f(D_2)$ אז f אינה חח"ע.

6) $f:A\to B$ פונקציה ותהינה $E_1\ ,\ E_2\subseteq B$.
הוכח כל אחת מהטענות הבאות:
א. $f^{-1}(E_1\cap E_2)=f^{-1}(E_1)\cap f^{-1}(E_2)$
ב. $f^{-1}(E_1\cup E_2)=f^{-1}(E_1)\cup f^{-1}(E_2)$

7) $f:A\rightarrow B$ פונקציה ותהי $D\subseteq A$.
הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות:
א. $f^{-1}(f(D))\subseteq D$
ב. $f^{-1}(f(D))\supseteq D$
ג. אם f חח״ע אז $f^{-1}(f(D))=D$.
ד. אם f לא חח״ע אז $f^{-1}(f(D))\neq D$.
ה. אם f על אז $f^{-1}(f(D))=D$.
ו. אם לכל $D\subseteq A$ מתקיים $f^{-1}(f(D))=D$ אז f על.
ז. אם $f^{-1}(f(D))=D$ אז f חח״ע.
ח. אם לכל $D\subseteq A$ מתקיים $f^{-1}(f(D))=D$ אז f חח״ע.
ט. אם $f^{-1}(f(D))\neq D$ אז f אינה חח״ע.
י. אם f על אז לכל $D\subseteq A$ מתקיים $f^{-1}(f(D))=D$.
יא. אם f לא על אז קיימת $D\subseteq A$ עבורה $f^{-1}(f(D))\neq D$.
יב. אם f לא חח״ע אז קיימת $D\subseteq A$ עבורה $f^{-1}(f(D))\neq D$.

8) $f:A\rightarrow B$ פונקציה ותהי $E\subseteq B$ הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות:
א. $f(f^{-1}(E))\subseteq E$
ב. $f(f^{-1}(E))\supseteq E$
ג. $f(f^{-1}(E))\subseteq E$ או $f(f^{-1}(E))\supseteq E$.
ד. אם f חח״ע אז $f(f^{-1}(E))=E$.
ה. אם f על אז $f(f^{-1}(E))=E$.
ו. אם לכל $E\subseteq B$ מתקיים $f(f^{-1}(E))=E$ אז f חח״ע.
ז. אם לכל $E\subseteq B$ מתקיים $f(f^{-1}(E))=E$ אז f על.
ח. אם לא לכל $E\subseteq B$ מתקיים $f(f^{-1}(E))=E$ אז f לא על.
ט. אם לכל $E\subseteq B$ מתקיים $f(f^{-1}(E))=E$ אז f היא פונקציית הזהות.
י. אם קיימת $E\subseteq B$ כך ש- $f(f^{-1}(E))\neq E$ אז קיים $\alpha\in A$ כך שלכל $\beta\in A$ מתקיים: $f(\beta)\neq\alpha$.

9) נתונות פונקציה $f:A\to B$ וקבוצות $C,D\subseteq A$.

א. הוכח כי: $f(C\cap D)\subseteq f(C)\cap f(D)$.

ב. הוכח שאם f היא חד-חד-ערכית אז $f(C\cap D)=f(C)\cap f(D)$.

ג. הדגם קבוצות $C,D\subseteq \mathbb{N}$ ופונקציה $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ כך ש- f על וגם $f(C\cap D)\subset f(C)\cap f(D)$.

ד. הוכח כי: $f(C\cup D)=f(C)\cup f(D)$.

תשובות סופיות:

1) א. $\{2,16,18\}$ ב. $\{4\}$ ג. $\{4n|n\in N\}$ ד. ראה סרטון.
ה. $\{4n+2|n\in N\}$ ו. $\mathbb{N}$ ז. $\varnothing$

2) א. $\{0,1,4,5\}$ ב. $\{0,4\}$ ג. $\{0,4\}$ ד. $\varnothing$ ה. $\{1,8\}$

3) א. לא נכון. ב. לא נכון. ג. לא נכון. ד. לא נכון. ה. נכון.
ו. לא נכון. ז. נכון. ח. לא נכון. ט. נכון. י. נכון.

4) הוכחה.

5) א. נכון. ב. לא נכון. ג. נכון. ד. לא נכון. ה. נכון.

6) הוכחה.

7) א. לא נכון. ב. נכון. ג. נכון. ד. לא נכון. ה. לא נכון.
ו. לא נכון. ז. לא נכון. ח. נכון. ט. נכון. י. לא נכון.
יא. לא נכון. יב. לא נכון.

8) א. לא נכון. ב. נכון. ג. נכון. ד. לא נכון. ה. נכון.
ו. לא נכון. ז. נכון. ח. נכון. ט. לא נכון. י. נכון.

9) הוכחה.

הרכבת פונקציות

שאלות

1) חשבו את ההרכבה $f\circ g$ ו- $g\circ f$ במקרה שהן מוגדרות עבור הפונקציות הנתונות.

א. $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\quad g(x)=3x+7 \qquad f(x)=2^{x^2-1}$

ב. $f,g:P(\mathbb{R})\to P(\mathbb{R})$ $\quad g(A)=\bar{A} \qquad f(A)=A\cap\mathbb{N}$

ג. $f,g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ $\quad \mathrm{g}(n)=10n \qquad f(n)=\text{The sum of } n\text{'s digits}$

ד. $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\quad g(x)=\begin{cases}5 & x\ge 1\\ 2 & x<1\end{cases} \qquad f(x)=\begin{cases}7 & x<3\\ 8 & x\ge 3\end{cases}$

ה. $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\quad g(x)=\begin{cases}2x-1 & x\le 3\\ x & x>3\end{cases} \qquad f(x)=2x-1$

2) חשבו את ההרכבה הבאה:

א. נגדיר $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ באופן הבא:

$$g(x)=\begin{cases}3 & x\ge 1\\ 2 & x<1\end{cases},\ f(x)=\begin{cases}4x+3 & x<5\\ 2x & x\ge 5\end{cases}.$$

חשבו $g\circ f$.

ב. עבור $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$g(x)=\begin{cases}x+3 & x<2\\ 2x-1 & x\ge 2\end{cases},\ f(x)=\begin{cases}3x+1 & x\ge 1\\ 4-3x & x<1\end{cases}.$$

חשבו $f\circ g$.

3) בדקו את השוויון $f\circ(g\circ h)=(f\circ g)\circ h$ עבור הפונקציות הבאות:

א. $f,g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\quad f(x)=2x+3\ ,\ g(x)=2x+3\ ,\ h(x)=2x+3$

ב. $f,g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\quad f(x)=3^{x^2-7}\ ,\ g(x)=x^3+1\ ,\ h(x)=\dfrac{2}{\sqrt{|x|+3}}$

ג. $f,g,h:P(\mathbb{R})\to P(\mathbb{R})$ $\quad f(A)=A\cap\mathbb{N}\ ,\ g(A)=\bar{A}\ ,\ h(A)=A\vartriangle\mathbb{Z}$

שאלת חזרה

יהיו f ו- g פונקציות מ- $\mathbb{N}$ ל- $\mathbb{N}$ המוגדרות כך: $f(n)=\begin{cases} \frac{n+1}{2} & n \text{ odd} \\ n-1 & n \text{ even} \end{cases}$,

וכן לכל $n\in\mathbb{N}$, $g(n)=2n-1$.

הוכיחו או הפריכו:

א. f היא חח"ע.

ב. g חח"ע.

ג. f על $\mathbb{N}$.

ד. g על $\mathbb{N}$.

ה. $f\circ g$ היא פונקציית הזהות על $\mathbb{N}$.

ו. $g\circ f$ היא פונקציית הזהות על $\mathbb{N}$.

4) תהי $f:A\to B$ פונקציה הוכיחו כי $I_B\circ f=f$, $f\circ I_A=f$.
הסיקו כי לכל $f:A\to A$ מתקיים $f\circ I_A=I_A\circ f=f$ זה מראה כי פונקציית הזהות מתנהגת כמו 1 בכפל.

5) תהיינה $h:A\to B$, $g:B\to C$, $f:C\to D$ שלוש פונקציות.
הוכיחו כי $(f\circ g)\circ h=f\circ(g\circ h)$.
המשמעות של תכונה זו היא שאפשר למקם סוגרים כרצוננו בדיוק כמו בכפל וחיבור רגילים.

6) תהי $f:A\to A$.
הוכיחו את הזהויות הבאות.
הערה: בשני הסעיפים האחרונים נתון כי f הפיכה.

א. $f^m\circ f^k=f^{m+k}$

ב. $f^2\circ f^{-5}=f^{2-5}=f^{-3}$ $\quad$ $f^5\circ f^{-2}=f^{5-2}=f^3$

ג. הסק מסעיף קודם כי $f^m\circ f^{-k}=f^{m-k}$ והסק כי $f^0=I$

ד. $\left(f^m\right)^k=\left(f^m\right)^k=f^{mk}$

ה. $\left(f^{-1}\right)^{-1}=f$

ו. $\left(f^{-1}\right)^n=\left(f^n\right)^{-1}$

7) תהיינה $f,g:A\to A$.
הוכיחו כי $\operatorname{Im} f\circ g\subseteq \operatorname{Im} f$ ותנו דוגמה לפונקציות עבורן ההכלה היא הכלה ממש.

8) הוכיחו או הפריכו:
א. אם g היא פונקציה על אז $\operatorname{Im} f\circ g=\operatorname{Im} f$.
ב. אם $\operatorname{Im} f\circ g=\operatorname{Im} f$ אז g היא פונקציה על.

9) תהי $\mathbb{N}$ הטבעיים ותהי $B\subseteq\mathbb{N}$ תת קבוצה סופית לא ריקה נתונה.
נגדיר $f:P(\mathbb{N})\to P(\mathbb{N})$ באופן הבא: $f(X)=\begin{cases}X\cap B^C & X\cap B\neq\varnothing\\ X\cup B & X\cap B=\varnothing\end{cases}$.
לדוגמה, עבור $B=\{1,2\}$ מתקיים: $f(\{2,3\})=\{3\},\ f(\{3,4\})=\{1,2,3,4\}$.
א. הוכיחו כי אם $X\cap B=\varnothing$ אז $f(f(X))=X$.
ב. הוכיחו כי אם $B\subseteq X$ אז $f(f(X))=X$.
ג. הוכיחו כי אם X שייכת לתמונה של הפונקציה אז $f(f(X))=X$.
ד. האם הפונקציה חח״ע?
ה. האם הפונקציה על?

10) תהי A קבוצה ו-B תת קבוצה החלקית **ממש** ל-A. נתונות הפונקציות $f,g:P(A)\to P(A)$ המוגדרות באופן הבא: $\begin{matrix} g(X)=X\cap B \\ f(X)=A-X \end{matrix}$.

הוכיחו או הפריכו: $f\circ g$ על.

11) הוכיחו או הפריכו:

הפונקציה $f;\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, המוגדרת על-ידי $f\left((x,y)\right)=(3x+4y,4x+5y)$,

היא פונקציה הפיכה.

12) נגדיר פונקציה $h:\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$ כך: $h(x)=2x$

הוכיחו כי $\left\{f\circ h \middle| f\in\mathbb{N}^{\mathbb{Z}}\right\}=\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

13) מצאו $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ שאינה פונקציה קבועה ואינה זהות כך ש- $f\circ f=f$.

14) נתונות שלוש פונקציות $f,g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

הוכיחו כי אם $f\circ g$ חח״ע וגם $g\circ h$ חח״ע וגם $h\circ g\circ f$ על,

אז f,g,h שלושתן הפיכות.

15) תהיינה $g:A\to B,\ f:B\to C$ שתי פונקציות (בתנאים אלו $f\circ g:A\to C$).

הוכיחו או הפריכו (במקרה של הפרכה בחרו $A=B=C=\mathbb{N}$):

א. אם f חח״ע וגם g חח״ע אז $f\circ g$ חח״ע.

ב. אם $f\circ g$ חח״ע אז f חח״ע.

ג. אם $f\circ g$ חח״ע אז g חח״ע

ד. אם f על וגם g על אז $f\circ g$ על.

ה. אם $f\circ g$ על אז f על.

ו. אם $f\circ g$ על אז g על.

ז. אם $f\circ g$ חח״ע וגם g על אז f חח״ע.

ח. אם $f\circ g$ על וגם f חח״ע אז g על.

ט. אם f לא חח״ע וגם g לא על אז $f\circ g$ לא חח״ע או $f\circ g$ לא על.

16) תהי A קבוצה כלשהי ותהיינה $f,g,h:A\to A$.

הוכיחו או הפריכו:

א. אם $g\circ f=h\circ f$ אז $g=h$.

ב. אם $g\circ f=h\circ f$ וגם f על אז $g=h$.

ג. אם $g\circ f=h\circ f$ וגם f חח״ע אז $g=h$.

ד. אם $f\circ g=f\circ h$ אז $g=h$.

ה. אם $f\circ g=f\circ h$ וגם f חח״ע אז $g=h$.

ו. אם $f\circ g=f\circ h$ וגם f על אז $g=h$.

17) תהי A קבוצה ותהי $f:A\to A]$ פונקציה.

הוכיחו או הפריכו:

א. אם $f\circ f=f$ אז $f=I$.

ב. אם $f\circ f=f$ אז $f=I$ או ש- f היא פונקציה קבועה.

ג. אם $f\circ f=f$ וגם f חח״ע אז $f=I$.

ד. אם $f\circ f=f$ וגם f על אז $f=I$.

18) יהיו $f,g,h:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ הפריכו (שאלה קשה מאוד):

א. אם $f\circ g=f\circ h$ וגם f על וגם g,h חח״ע וגם אז $g=h$.

ב. אם $g\circ f=h\circ f$ וגם f חח״ע וגם g,h על אז $g=h$.

ג. אם $f\circ f\circ f=I$ אז $f\circ f=I$.

ד. אם $f\circ f\circ f=f\circ f$ אז $f\circ f=f$.

תשובות סופיות

השאלות בנושא זה הן שאלות הוכחה, ראו תשובות מפורטות באתר.