

# אשנב למתמטיקה

פרק 1 - פונקציות

תוכן העניינים

- 1. מבוא והגדרות ראשונות ..... 1
- 2. תמונה של קבוצה ..... 6
- 3. הרכבת פונקציות והפונקציה ההפוכה ..... 10

## מבוא לפונקציות:

## שאלות:

אופציה	תיאור	אופציה	תיאור

- (1) בכל אחד מהאיורים הבאים זהה את התחום ואת הטווח ובחר את האפשרות המתאימה:
- א. זו אינה פונקציה.
  - ב. זו פונקציה חח"ע שאינה על.
  - ג. זו פונקציה על שאינה חח"ע.
  - ה. זו פונקציה שאינה חח"ע ואינה על.
  - ו. זו פונקציה שהיא גם חח"ע וגם על.

- (2) עבור הפונקציה  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  מוגדרת ע"י  $g(x) = \lfloor x \rfloor$  (ערך שלם תחתון של  $x$ ). חשב את:

א.  $g(\pi), g(-\pi)$

ב.  $\text{Im}(g)$

ג. מצא מקור ל-7.

ד. מצא את כל המקורות ל-7.

ה. האם כל איבר בטווח הוא גם תמונה?

- (3) עבור כל אחת מהפונקציות הבאות, קבע האם היא חח"ע? האם על? הוכח טענותיך.

א. פונקציית הזהות  $I_A: A \rightarrow A$  המוגדרת ע"י  $I_A(x) = x$ .

ב.  $h_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  מוגדרת ע"י  $h_1(x) = 2x + 1$ .

ג.  $h_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  מוגדרת ע"י  $g(x) = \lfloor x \rfloor$  (ערך שלם תחתון של  $x$ ).

ד.  $h_3: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$  מוגדרת ע"י  $h_3(x, y) = x - y$ .

ה.  $h_4: P(\mathbb{N}) \times P(\mathbb{N}) \rightarrow P(\mathbb{N})$  מוגדרת ע"י  $h_4(A, B) = A \cup B$  וחשב את  $\text{Im} h_4$ .

ו.  $f_1: (0, \infty) \rightarrow (0, 2)$  מוגדרת ע"י  $f_1(x) = \frac{2x}{x+3}$ .

- ז.  $f_2: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  מוגדרת ע"י  $f_2(x) = x + \frac{1}{x}$ .
- ח.  $f_3: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  מוגדרת ע"י  $f_3(x) = x - \frac{1}{x}$ .
- ט.  $f_4: P(\mathbb{R}) \rightarrow P(\mathbb{R})$  מוגדרת ע"י  $f_4(X) = X \cap \mathbb{Z}$ .
- י.  $f_5: P(\mathbb{R}) \rightarrow P(\mathbb{Z})$  מוגדרת ע"י  $f_5(X) = X \cap \mathbb{Z}$ .
- יא.  $f_6: P(\mathbb{R}) \rightarrow P(\mathbb{R})$  מוגדרת ע"י  $f_6(X) = X \Delta \mathbb{Z}$ .
- יב.  $f_7: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  מוגדרת ע"י  $f_7(n) = \text{the sum of the digits of } n$ .
- יג.  $f_8: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  מוגדרת ע"י  $f_8(\langle x, y \rangle) = 3x + 2y$ .
- יד.  $f_9: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  מוגדרת ע"י  $f_9(\langle n, k \rangle) = 2^{n-1}(2k - 1)$ .
- טו.  $h: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  מוגדרת ע"י  $h(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & n \in \mathbb{N}_{\text{even}} \\ n+3 & n \in \mathbb{N}_{\text{odd}} \end{cases} = \begin{cases} \frac{n}{2} & n \in \mathbb{N}_{\text{even}} \\ n+3 & \text{else} \end{cases}$ .

4) בדוק אם הפונקציות הבאות חח"ע, על וחשב את תמונתן:

- א.  $f_9: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  מוגדרת ע"י  $f_9(x) = \begin{cases} \frac{n}{2} & 4|n \\ 2n+1 & \text{else} \end{cases}$  וחשב את  $Im f_9$ .
- ב.  $f_{10}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  מוגדרת ע"י  $f_{10}(x) = \begin{cases} 3x-1 & x < 2 \\ x-3 & x \geq 2 \end{cases}$  וחשב את  $Im f_{10}$ .
- ג.  $f_{11}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  מוגדרת ע"י  $f_{11}(x) = \begin{cases} x+1 & x \leq 1 \\ \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} & x > 1 \end{cases}$ .

5) תהיינה  $f, g: A \rightarrow A$  פונקציה. הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות:

- א. אם לכל איבר ב- $Im(f)$  יש מקור יחיד אז  $f$  חח"ע.
- ב. אם לכל איבר ב- $Im(f)$  יש מקור יחיד אז  $f$  על.
- ג. אם לכל איבר ב- $Im(f)$  יש מקור יחיד אז  $f$  אינה קבועה.
- ד. אם יש איבר ב- $Im(f)$  ללא מקור אז  $f$  על.
- ה. אם  $Im(f) \subset Im(g)$  (הכלה ממש) אז  $f$  אינה על.
- ו. אם  $Im(f) \subset Im(g)$  (הכלה ממש) אז  $g$  אינה על.
- ז. אם  $Im(f) = Im(g)$  אז  $f = g$ .
- ח. לכל  $D \subseteq A, D \neq \emptyset$  קיימת  $f: A \rightarrow A$  כך ש- $Im(f) = D$ .

6 נתונה  $g: \mathbb{N}_{odd} \rightarrow \mathbb{N}$  פונקציה לא ידועה.

$$נגדיר  $h: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  באופן הבא: 
$$h(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & n \in \mathbb{N}_{even} \\ g(n) & n \in \mathbb{N}_{odd} \end{cases}$$$$

למשל:  $h(34) = 17$ ,  $h(35) = g(35)$  שהוא מספר טבעי לא ידוע.  
הוכח כי  $h$  אינה חח"ע.

מצא אינסוף מספרים טבעיים שונים  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  כך שלכל  $i \neq j$  מתקיים  $h(x_i) = h(x_j)$ .

7 נגדיר  $F: (\mathbb{R}^{\mathbb{R}} \times P(\mathbb{R})) \rightarrow P(\mathbb{R})$  באופן הבא:  $F((f, A)) = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists y \in A \ f(y) = x\}$

א. עבור  $A = \{2, 3, 4, 5, 17, 18\}$ ,  $g(x) = 2x$ , חשב:  $F((g, A))$ .

ב. בדוק האם  $f$  חח"ע והאם על.

ג. מצא את  $\text{Im}(F)$ .

8 נגדיר  $G: \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \rightarrow P(\mathbb{N})$  באופן הבא:  $G(f) = \{\alpha \in \mathbb{N} \mid \exists \beta \in \mathbb{N} \ f(\beta) = \alpha\}$

א. חשב  $G(f)$  עבור  $f = I_{\mathbb{N}}$  פונקציית הזהות  $\mathbb{N}$  עבור

$$f(n) = \begin{cases} 1 & n \in \mathbb{N}_{even} \\ 4 & \text{else} \end{cases}$$

ועבור הפונקציה הקבועה 3.

ב. בדוק האם  $G$  חח"ע והאם על ומצא את  $\text{Im}(G)$ .

9 נגדיר פונקציה  $F: \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow P(\{0, 1\} \times \{0, 1\})$  באופן הבא:

$$F(g) = \{(g(n), g(n+1)) \mid n \in \mathbb{N}\}$$

הוכח כי  $F$  אינה על.

10 נגדיר  $F: \mathbb{N}^{\mathbb{R}} \rightarrow P(\mathbb{N})$  באופן הבא:  $F(f) = \{n \in \mathbb{R} \mid f(x) = 1\}$

הוכח כי  $F$  אינה חח"ע.

11 נגדיר פונקציה  $F: \{0, 1, 2\}^{\mathbb{N}} \rightarrow P(\mathbb{N})$  באופן הבא:  $F(f) = \{n \in \mathbb{N} \mid f(n) = 0\}$

קבע האם  $F$  חח"ע ועל.

**12** תהי  $P_{\text{even}}(\mathbb{N})$  קבוצת כל תת הקבוצות של  $\mathbb{N}$  שמספר אבריהן זוגי. ותהי  $P_{\text{odd}}(\mathbb{N})$  קבוצת כל התת הקבוצות של  $\mathbb{N}$  שמספר אבריהן אי זוגי. לדוגמה  $\{1,3\} \in P_{\text{even}}(\mathbb{N}), \{1,3\} \notin P_{\text{odd}}(\mathbb{N})$ , ולעומת זאת,  $\{2,4,6\} \in P_{\text{odd}}(\mathbb{N}), \{2,4,6\} \notin P_{\text{even}}(\mathbb{N})$ . לכל קבוצה  $A$  סופית של טבעיים נסמן ב- $\max(A)$  את המספר הגדול ביותר ב- $A$  וב- $\max(\emptyset) = 0$ . הוכיחו כי הפונקציה  $f: P_{\text{even}}(\mathbb{N}) \rightarrow P_{\text{odd}}(\mathbb{N})$  המוגדרת על ידי  $f(A) = A \cup \max(A)$  היא חח"ע אך אינה על.

**13** נגדיר  $H: \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \rightarrow P(\mathbb{R})$  באופן הבא:  $H(\langle f, g \rangle) = \text{Im } f \Delta \text{Im } g$ . בדוק אם  $f$  חח"ע ועל.

### פונקציות שחובה להכיר:

- 14** בכל אחד מהסעיפים הבאים מצא פונקציה כנדרש:
- מצא  $f: (0,1) \rightarrow (1,\infty)$  שהיא חח"ע ועל.
  - השתמש בפונקציה שמצאת בסעיף קודם כדי למצוא  $f: (0,1) \rightarrow (0,\infty)$  שהיא חח"ע ועל.
  - מצא  $f: [2,5] \rightarrow [1,7]$  שהיא חח"ע ועל.
  - עבור  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  מספרים נתונים מצא  $f: [a,b] \rightarrow [c,d]$  שהיא חח"ע ועל.
  - מצא  $f: [1,3] \cup [4,8] \rightarrow [0,1]$  שהיא חח"ע ועל.
  - מצא פונקציה  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$  שהיא חח"ע ועל. מצא גם  $g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$  שהיא היפוך החיצים לפונקציה  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$  שמצאת.
  - מצא פונקציה  $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  שהיא חח"ע ועל.
  - מצא פונקציה  $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  שהיא חח"ע.
  - מצא  $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  שהיא על. (רמז: סעיף קודם)
  - מצא פונקציה  $f: \underbrace{\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \dots \times \mathbb{N}}_7 \rightarrow \mathbb{N}$  (כלומר  $f: \mathbb{N}^7 \rightarrow \mathbb{N}$ ) שהיא חח"ע.
  - מצא פונקציה  $f: \mathbb{N} \times [0,1] \rightarrow [0,\infty)$  שהיא חח"ע ועל.
  - מצא גם  $g: [0,\infty) \rightarrow \mathbb{N} \times [0,1]$  שהיא היפוך החיצים לפונקציה שמצאת.
  - מצא פונקציה  $f: (0,1] \rightarrow (0,1)$  שהיא חח"ע ועל.
  - מצא  $F: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$  חח"ע ועל.
  - מצא פונקציה  $f: \mathbb{N} \times \{0,1\} \rightarrow \mathbb{N}$  שהיא חח"ע ועל.
  - מצא גם  $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \{0,1\}$  שהיא היפוך החיצים לפונקציה שמצאת.

טו. מצא  $f: \mathbb{R} \rightarrow (-1,1)$  שהיא חח"ע ועל.

טז. מצא  $F: \{0,1\}^A \rightarrow P(A)$  חח"ע ועל. הוכח כי הפונקציה שמצאת היא אכן חח"ע ועל.

יז. מצא  $F: \{0,1\}^{\mathbb{N}_{\text{even}}} \times \{0,1\}^{\mathbb{N}_{\text{odd}}} \rightarrow \{0,1\}^{\mathbb{N}}$  שהיא חח"ע ועל.

יח. מצא  $F: (\{0,1\}^{\mathbb{N}})^2 \rightarrow \{0,1,2,3\}^{\mathbb{N}}$  כלומר  $F: \{0,1\}^{\mathbb{N}} \times \{0,1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow \{0,1,2,3\}^{\mathbb{N}}$  שהיא חח"ע ועל והוכח שהיא חח"ע ועל.

## תמונה של קבוצה:

### רקע:

צפה בשיעורים בנושא תמונה ותמונה הפוכה של קבוצה בטרם תענה על השאלות שבנושא זה.

$$f(D) \subseteq E \Leftrightarrow \exists x \in D \text{ כך ש-} f(x) \in E$$

$$y \in f(D) \Leftrightarrow \exists x \in D \text{ כך ש-} f(x) = y$$

$$z \in f^{-1}(E) \Leftrightarrow f(z) \in E$$

### שאלות:

(1) נגדיר  $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  מוגדרת ע"י:  $g(n) = 2n$  .  $K = \{1, 8, 17\}$

חשב את הקבוצות הבאות:

א.  $g(K)$

ב.  $g^{-1}(K)$

ג.  $g(\mathbb{N})$

ד.  $g(\mathbb{N}_{\text{even}})$

ה.  $g(\mathbb{N}_{\text{odd}})$

ו.  $g^{-1}(\mathbb{N}_{\text{even}})$

ז.  $g^{-1}(\mathbb{N}_{\text{odd}})$

(2) נגדיר  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  מוגדרת ע"י:  $f(x) = x^2 - 5x + 4$  .  $M = \{0, 4\}$

נגדיר  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  מוגדרת ע"י:  $f(n) = \begin{cases} 2n & n \in \mathbb{N}_{\text{even}} \\ 1 & \text{else} \end{cases}$  ותהי  $E = \{1, 5, 6, 8\}$

חשב את הקבוצות הבאות:

א.  $f^{-1}(f(M))$

ב.  $f(f^{-1}(M))$

ג.  $f(f^{-1}(\{-3, 4\}))$

ד.  $f(f^{-1}(\{-3\}))$

ה.  $f(f^{-1}(E))$

3) תהי  $f: A \rightarrow B$  פונקציה ותהינה  $D \subseteq A$ ,  $E \subseteq B$  שתי קבוצות. הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות:

א.  $f(D) = D$

ב.  $f(D) \neq D$

ג.  $f^{-1}(E) = E$

ד.  $f^{-1}(E) \neq E$

ה.  $f(D) \subseteq f(A)$

ו. אם  $D \subset A$  אז  $f(D) \subset f(A)$  (שים ♥ שההכלות בסעיף זה הן הכלות ממש).

ז.  $f^{-1}(E) \subseteq A$

ח. אם  $E \subset B$  אז  $f^{-1}(E) \subset A$  (שים ♥ שההכלות בסעיף זה הן הכלות ממש).

ט.  $f$  על אס"ם לכל  $y \in B$  מתקיים:  $f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$ .

י.  $f$  חח"ע אס"ם לכל  $y \in A$  מתקיים:  $f^{-1}(\{y\})$  ריקה או בעלת איבר אחד.

4) בשאלה זו נבחן את השוויון:  $f(D_1 \cup D_2) = f(D_1) \cup f(D_2)$

א. אשר את השוויון עבור  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  מוגדרת ע"י:  $f(x) = x^2$ .

$$D_1 = \{2, 5\} \quad D_2 = \{-2, 4\}$$

ב. הוכח כי שוויון זה מתקיים תמיד.

כלומר: תהי  $f: A \rightarrow B$  פונקציה ותהינה  $D_1, D_2 \subseteq A$ .

הוכח כי:  $f(D_1 \cup D_2) = f(D_1) \cup f(D_2)$ .

5)  $f: A \rightarrow B$  פונקציה ותהינה  $D_1, D_2 \subseteq A$

הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות:

א.  $f(D_1 \cap D_2) \subseteq f(D_1) \cap f(D_2)$

ב.  $f(D_1 \cap D_2) \supseteq f(D_1) \cap f(D_2)$

ג. אם  $f$  חח"ע אז  $f(D_1 \cap D_2) = f(D_1) \cap f(D_2)$ .

ד. אם  $f$  על אז  $f(D_1 \cap D_2) = f(D_1) \cap f(D_2)$ .

ה. אם  $f(D_1 \cap D_2) \neq f(D_1) \cap f(D_2)$  אז  $f$  אינה חח"ע.

6)  $f: A \rightarrow B$  פונקציה ותהינה  $E_1, E_2 \subseteq B$

הוכח כל אחת מהטענות הבאות:

א.  $f^{-1}(E_1 \cap E_2) = f^{-1}(E_1) \cap f^{-1}(E_2)$

ב.  $f^{-1}(E_1 \cup E_2) = f^{-1}(E_1) \cup f^{-1}(E_2)$

7)  $f : A \rightarrow B$  פונקציה ותהי  $D \subseteq A$ .

הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות:

א.  $f^{-1}(f(D)) \subseteq D$

ב.  $f^{-1}(f(D)) \supseteq D$

ג. אם  $f$  חח"ע אז  $f^{-1}(f(D)) = D$ .

ד. אם  $f$  לא חח"ע אז  $f^{-1}(f(D)) \neq D$ .

ה. אם  $f$  על אז  $f^{-1}(f(D)) = D$ .

ו. אם לכל  $D \subseteq A$  מתקיים  $f^{-1}(f(D)) = D$  אז  $f$  על.

ז. אם  $f^{-1}(f(D)) = D$  אז  $f$  חח"ע.

ח. אם לכל  $D \subseteq A$  מתקיים  $f^{-1}(f(D)) = D$  אז  $f$  חח"ע.

ט. אם  $f^{-1}(f(D)) \neq D$  אז  $f$  אינה חח"ע.

י. אם  $f$  על אז לכל  $D \subseteq A$  מתקיים  $f^{-1}(f(D)) = D$ .

יא. אם  $f$  לא על אז קיימת  $D \subseteq A$  עבורה  $f^{-1}(f(D)) \neq D$ .

יב. אם  $f$  לא חח"ע אז קיימת  $D \subseteq A$  עבורה  $f^{-1}(f(D)) \neq D$ .

8)  $f : A \rightarrow B$  פונקציה ותהי  $E \subseteq B$  הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות:

א.  $f(f^{-1}(E)) \subseteq E$

ב.  $f(f^{-1}(E)) \supseteq E$

ג.  $f(f^{-1}(E)) \subseteq E$  או  $f(f^{-1}(E)) \supseteq E$ .

ד. אם  $f$  חח"ע אז  $f(f^{-1}(E)) = E$ .

ה. אם  $f$  על אז  $f(f^{-1}(E)) = E$ .

ו. אם לכל  $E \subseteq B$  מתקיים  $f(f^{-1}(E)) = E$  אז  $f$  חח"ע.

ז. אם לכל  $E \subseteq B$  מתקיים  $f(f^{-1}(E)) = E$  אז  $f$  על.

ח. אם לא לכל  $E \subseteq B$  מתקיים  $f(f^{-1}(E)) = E$  אז  $f$  לא על.

ט. אם לכל  $E \subseteq B$  מתקיים  $f(f^{-1}(E)) = E$  אז  $f$  היא פונקציית הזהות.

י. אם קיימת  $E \subseteq B$  כך ש- $E \neq f(f^{-1}(E))$  אז קיים  $\alpha \in A$  כך שלכל  $\beta \in A$

מתקיים:  $f(\beta) \neq \alpha$ .

- 9 נתונות פונקציה  $f: A \rightarrow B$  וקבוצות  $C, D \subseteq A$ .
- א. הוכח כי:  $f(C \cap D) \subseteq f(C) \cap f(D)$ .
- ב. הוכח שאם  $f$  היא חד-חד-ערכית אז  $f(C \cap D) = f(C) \cap f(D)$ .
- ג. הדגם קבוצות  $C, D \subseteq \mathbb{N}$  ופונקציה  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  כך ש- $f$  על וגם  $f(C \cap D) \subset f(C) \cap f(D)$ .
- ד. הוכח כי:  $f(C \cup D) = f(C) \cup f(D)$ .

## תשובות סופיות:

- (1) א.  $\{2, 16, 18\}$  ב.  $\{4\}$  ג.  $\{4n | n \in \mathbb{N}\}$  ד. ראה סרטון.  
ה.  $\{4n + 2 | n \in \mathbb{N}\}$  ו.  $\mathbb{N}$  ז.  $\emptyset$
- (2) א.  $\{0, 1, 4, 5\}$  ב.  $\{0, 4\}$  ג.  $\{0, 4\}$  ד.  $\emptyset$  ה.  $\{1, 8\}$
- (3) א. לא נכון. ב. לא נכון. ג. לא נכון. ד. לא נכון. ה. נכון.  
ו. לא נכון. ז. נכון. ח. לא נכון. ט. נכון. י. נכון.
- (4) הוכחה.
- (5) א. נכון. ב. לא נכון. ג. נכון. ד. לא נכון. ה. נכון.
- (6) הוכחה.
- (7) א. לא נכון. ב. נכון. ג. נכון. ד. לא נכון. ה. לא נכון.  
ו. לא נכון. ז. לא נכון. ח. נכון. ט. נכון. י. לא נכון.  
יא. לא נכון. יב. לא נכון.
- (8) א. לא נכון. ב. נכון. ג. נכון. ד. לא נכון. ה. נכון.  
ו. לא נכון. ז. נכון. ח. נכון. ט. לא נכון. י. נכון.
- (9) הוכחה.

## הרכבת פונקציות

### שאלות

1) חשבו את ההרכבה  $f \circ g$  ו-  $g \circ f$  במקרה שהן מוגדרות עבור הפונקציות הנתונות.

$$f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{א.} \quad f(x) = 2^{x^2-1} \quad g(x) = 3x+7$$

$$f, g: P(\mathbb{R}) \rightarrow P(\mathbb{R}) \quad \text{ב.} \quad f(A) = A \cap \mathbb{N} \quad g(A) = \bar{A}$$

$$f, g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \quad \text{ג.} \quad f(n) = \text{The sum of } n\text{'s digits} \quad g(n) = 10n$$

$$f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{ד.} \quad f(x) = \begin{cases} 7 & x < 3 \\ 8 & x \geq 3 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 5 & x \geq 1 \\ 2 & x < 1 \end{cases}$$

$$f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{ה.} \quad f(x) = 2x-1 \quad g(x) = \begin{cases} 2x-1 & x \leq 3 \\ x & x > 3 \end{cases}$$

2) חשבו את ההרכבה הבאה:

א. נגדיר  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  באופן הבא:

$$f(x) = \begin{cases} 4x+3 & x < 5 \\ 2x & x \geq 5 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} 3 & x \geq 1 \\ 2 & x < 1 \end{cases}$$

חשבו  $g \circ f$ .

ב. עבור  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 3x+1 & x \geq 1 \\ 4-3x & x < 1 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} x+3 & x < 2 \\ 2x-1 & x \geq 2 \end{cases}$$

חשבו  $f \circ g$ .

3) בדקו את השוויון  $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$  עבור הפונקציות הבאות:

$$f, g, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{א.} \quad f(x) = 2x+3, \quad g(x) = 2x+3, \quad h(x) = 2x+3$$

$$f, g, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{ב.} \quad f(x) = 3^{x^2-7}, \quad g(x) = x^3+1, \quad h(x) = \frac{2}{\sqrt{|x|}+3}$$

$$f, g, h: P(\mathbb{R}) \rightarrow P(\mathbb{R}) \quad \text{ג.} \quad f(A) = A \cap \mathbb{N}, \quad g(A) = \bar{A}, \quad h(A) = A \Delta \mathbb{Z}$$

## שאלת חזרה

יהיו  $f$  ו- $g$  פונקציות מ- $\mathbb{N}$  ל- $\mathbb{N}$  המוגדרות כך:  $f(n) = \begin{cases} \frac{n+1}{2} & n \text{ odd} \\ n-1 & n \text{ even} \end{cases}$

וכן לכל  $n \in \mathbb{N}$ ,  $g(n) = 2n - 1$ .

הוכיחו או הפריכו:

א.  $f$  היא חח"ע.

ב.  $g$  חח"ע.

ג.  $f$  על  $\mathbb{N}$ .

ד.  $g$  על  $\mathbb{N}$ .

ה.  $f \circ g$  היא פונקציית הזהות על  $\mathbb{N}$ .

ו.  $g \circ f$  היא פונקציית הזהות על  $\mathbb{N}$ .

(4) תהי  $f: A \rightarrow B$  פונקציה הוכיחו כי  $f \circ I_A = f$ ,  $I_B \circ f = f$ .  
 הסיקו כי לכל  $f: A \rightarrow A$  מתקיים  $f \circ I_A = I_A \circ f = f$  זה מראה כי פונקציית הזהות מתנהגת כמו 1 בכפל.

(5) תהיינה  $f: C \rightarrow D$ ,  $g: B \rightarrow C$ ,  $h: A \rightarrow B$  שלוש פונקציות.  
 הוכיחו כי  $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ .  
 המשמעות של תכונה זו היא שאפשר למקם סוגרים כרצוננו בדיוק כמו בכפל וחיבור רגילים.

6) תהי  $f : A \rightarrow A$ .

הוכיחו את הזהויות הבאות.

הערה: בשני הסעיפים האחרונים נתון כי  $f$  הפיכה.

א.  $f^m \circ f^k = f^{m+k}$

ב.  $f^5 \circ f^{-2} = f^{5-2} = f^3$        $f^2 \circ f^{-5} = f^{2-5} = f^{-3}$

ג. הסק מסעיף קודם כי  $f^m \circ f^{-k} = f^{m-k}$  והסק כי  $f^0 = I$

ד.  $(f^m)^k = (f^m)^k = f^{mk}$

ה.  $(f^{-1})^{-1} = f$

ו.  $(f^{-1})^n = (f^n)^{-1}$

7) תהיינה  $f, g : A \rightarrow A$ .

הוכיחו כי  $\text{Im } f \circ g \subseteq \text{Im } f$  ותנו דוגמה לפונקציות עבורן ההכלה היא הכלה ממש.

8) הוכיחו או הפריכו:

א. אם  $g$  היא פונקציה על אז  $\text{Im } f \circ g = \text{Im } f$ .

ב. אם  $\text{Im } f \circ g = \text{Im } f$  אז  $g$  היא פונקציה על.

9) תהי  $\mathbb{N}$  הטבעיים ותהי  $B \subseteq \mathbb{N}$  תת קבוצה סופית לא ריקה נתונה.

נגדיר  $f : P(\mathbb{N}) \rightarrow P(\mathbb{N})$  באופן הבא:

$$f(X) = \begin{cases} X \cap B^c & X \cap B \neq \emptyset \\ X \cup B & X \cap B = \emptyset \end{cases}$$

לדוגמה, עבור  $B = \{1, 2\}$  מתקיים:  $f(\{2, 3\}) = \{3\}$ ,  $f(\{3, 4\}) = \{1, 2, 3, 4\}$ .

א. הוכיחו כי אם  $X \cap B = \emptyset$  אז  $f(f(X)) = X$ .

ב. הוכיחו כי אם  $B \subseteq X$  אז  $f(f(X)) = X$ .

ג. הוכיחו כי אם  $X$  שייכת לתמונה של הפונקציה אז  $f(f(X)) = X$ .

ד. האם הפונקציה חח"ע?

ה. האם הפונקציה על?

**10** תהי  $A$  קבוצה ו- $B$  תת קבוצה החלקית ממש ל- $A$ . נתונות הפונקציות

$$\begin{aligned} g(X) &= X \cap B \\ f(X) &= A - X \end{aligned} \quad f, g: P(A) \rightarrow P(A)$$

הוכיחו או הפריכו:  $f \circ g$  על.

**11** הוכיחו או הפריכו:

הפונקציה  $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , המוגדרת על-ידי  $f((x, y)) = (3x + 4y, 4x + 5y)$ , היא פונקציה הפיכה.

**12** נגדיר פונקציה  $h: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$  כך:  $h(x) = 2x$

הוכיחו כי  $\{f \circ h \mid f \in \mathbb{N}^{\mathbb{Z}}\} = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ .

**13** מצאו  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  שאינה פונקציה קבועה ואינה זהות כך ש- $f \circ f = f$ .

**14** נתונות שלוש פונקציות  $f, g, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

הוכיחו כי אם  $f \circ g$  חח"ע וגם  $g \circ h$  חח"ע וגם  $h \circ f$  על, אז  $f, g, h$  שלושתן הפיכות.

**15** תהינה  $f: B \rightarrow C$ ,  $g: A \rightarrow B$  שתי פונקציות (בתנאים אלו  $f \circ g: A \rightarrow C$ ).

הוכיחו או הפריכו (במקרה של הפרכה בחרו  $A = B = C = \mathbb{N}$ ):

א. אם  $f$  חח"ע וגם  $g$  חח"ע אז  $f \circ g$  חח"ע.

ב. אם  $f \circ g$  חח"ע אז  $f$  חח"ע.

ג. אם  $f \circ g$  חח"ע אז  $g$  חח"ע.

ד. אם  $f$  על וגם  $g$  על אז  $f \circ g$  על.

ה. אם  $f \circ g$  על אז  $f$  על.

ו. אם  $f \circ g$  על אז  $g$  על.

ז. אם  $f \circ g$  חח"ע וגם  $g$  על אז  $f$  חח"ע.

ח. אם  $f \circ g$  על וגם  $f$  חח"ע אז  $g$  על.

ט. אם  $f$  לא חח"ע וגם  $g$  לא על אז  $f \circ g$  לא חח"ע או  $f \circ g$  לא על.

16) תהי  $A$  קבוצה כלשהי ותהיינה  $f, g, h: A \rightarrow A$ . הוכיחו או הפריכו:

- א. אם  $g = h$  אז  $g \circ f = h \circ f$ .  
 ב. אם  $g \circ f = h \circ f$  וגם  $f$  על אז  $g = h$ .  
 ג. אם  $g \circ f = h \circ f$  וגם  $f$  חח"ע אז  $g = h$ .  
 ד. אם  $f \circ g = f \circ h$  אז  $g = h$ .  
 ה. אם  $f \circ g = f \circ h$  וגם  $f$  חח"ע אז  $g = h$ .  
 ו. אם  $f \circ g = f \circ h$  וגם  $f$  על אז  $g = h$ .

17) תהי  $A$  קבוצה ותהי  $f: A \rightarrow A$  פונקציה. הוכיחו או הפריכו:

- א. אם  $f \circ f = f$  אז  $f = I$ .  
 ב. אם  $f \circ f = f$  אז  $f = I$  או ש- $f$  היא פונקציה קבועה.  
 ג. אם  $f \circ f = f$  וגם  $f$  חח"ע אז  $f = I$ .  
 ד. אם  $f \circ f = f$  וגם  $f$  על אז  $f = I$ .

18) יהיו  $f, g, h: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  הפריכו (שאלה קשה מאוד):

- א. אם  $f \circ g = f \circ h$  וגם  $f$  על וגם  $g, h$  חח"ע וגם אז  $g = h$ .  
 ב. אם  $g \circ f = h \circ f$  וגם  $f$  חח"ע וגם  $g, h$  על אז  $g = h$ .  
 ג. אם  $f \circ f = I$  או  $f \circ f \circ f = I$ .  
 ד. אם  $f \circ f \circ f = f \circ f$  אז  $f \circ f = f$ .

### תשובות סופיות

השאלות בנושא זה הן שאלות הוכחה, ראו תשובות מפורטות באתר.