

מתמטיקה לפכ"מ

פרק 4 - פונקציות - רמה מתקדמת

תוכן העניינים

1. פונקציות.....1

פונקציות

שאלות

$$(1) \text{ יהיו } f \text{ ו-} g \text{ פונקציות מ-} \mathbb{N} \text{ ל-} \mathbb{N}, \text{ כאשר } f(n) = \begin{cases} \frac{n+1}{2} & \text{odd} \\ n-1 & \text{even} \end{cases}$$

$$\text{ו-} g(n) = 2n-1 \text{ לכל } n \in \mathbb{N}.$$

הוכיחו או הפריכו:

א. f חח"ע.

ב. g חח"ע.

ג. f על $\mathbb{N}$.

ד. g על $\mathbb{N}$.

ה. $f \circ g$ פונקציית הזהות על $\mathbb{N}$.

ו. $g \circ f$ פונקציית הזהות על $\mathbb{N}$.

(2) קבעו האם הפונקציות הבאות חח"ע ועל. נמקו.

$$\text{א. } f_1(x) = \frac{2x}{x+3}, f_1: (0, \infty) \rightarrow (0, 2)$$

$$\text{ב. } f_2(x) = x + \frac{1}{x}, f_2: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$$

$$\text{ג. } f_3(x) = x - \frac{1}{x}, f_3: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{ד. } f_4(X) = X \cap \mathbb{Z}, f_4: P(\mathbb{R}) \rightarrow P(\mathbb{R})$$

$$\text{ה. } f_5(X) = X \cap \mathbb{Z}, f_5: P(\mathbb{R}) \rightarrow P(\mathbb{Z})$$

$$\text{ו. } f_7(X) = X \Delta \mathbb{Z}, f_7: P(\mathbb{R}) \rightarrow P(\mathbb{R})$$

$$\text{ז. } f_8(n) = \text{the sum of the digits of } n, f_8: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

(3) יהיו $g: A \rightarrow B, f: B \rightarrow C$ שתי פונקציות (כמובן שבתנאים אלו $f \circ g: A \rightarrow C$), הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

(במקרה של הפרכה בחרו $A=B=C=\mathbb{N}$)

- א. אם f חח"ע וגם g חח"ע, אז $f \circ g$ חח"ע.
- ב. אם $f \circ g$ חח"ע, אז f חח"ע.
- ג. אם $f \circ g$ חח"ע, אז g חח"ע.
- ד. אם f על וגם g על, אז $f \circ g$ על.
- ה. אם $f \circ g$ על, אז f על.
- ו. אם $f \circ g$ על, אז g על.
- ז. אם $f \circ g$ חח"ע וגם g על, אז f חח"ע.
- ח. אם $f \circ g$ על וגם f חח"ע, אז g על.
- ט. אם f לא חח"ע וגם g לא על, אז $f \circ g$ לא חח"ע או $f \circ g$ לא על.

(4) תהי A קבוצה כלשהי ותהיינה $f, g, h: A \rightarrow A$. הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

- א. אם $g = h$, אז $g \circ f = h \circ f$.
- ב. אם $g \circ f = h \circ f$ וגם f על, אז $g = h$.
- ג. אם $g \circ f = h \circ f$ וגם f חח"ע, אז $g = h$.
- ד. אם $f \circ g = f \circ h$, אז $g = h$.
- ה. אם $f \circ g = f \circ h$ וגם f חח"ע, אז $g = h$.
- ו. אם $f \circ g = f \circ h$ וגם f על, אז $g = h$.

(5) נתונות פונקציה $f: A \rightarrow B$ וקבוצות $C, D \subseteq A$.

- א. הוכיחו כי $f(C \cap D) \subseteq f(C) \cap f(D)$.
- ב. הוכיחו שאם f חח"ע, אז $f(C \cap D) = f(C) \cap f(D)$.
- ג. הדגימו קבוצות $C, D \subseteq \mathbb{N}$ ופונקציה $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, כך ש- f על וגם $f(C \cap D) \subsetneq f(C) \cap f(D)$.
- ד. הוכיחו כי $f(C \cup D) = f(C) \cup f(D)$.

(6) תהי A קבוצה ותהי $f: A \rightarrow A$ פונקציה. הוכיחו או הפריכו:

- א. אם $f \circ f = f$, אז $f = I$.
- ב. אם $f \circ f = f$, אז $f = I$ או ש- f פונקציה קבועה.
- ג. אם $f \circ f = f$ וגם f חח"ע, אז $f = I$.
- ד. אם $f \circ f = f$ וגם f על, אז $f = I$.

7 יהיו $f, g, h: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$.

הפריכו (שאלה קשה מאוד):

א. אם $f \circ g = f \circ h$ וגם f על וגם g, h חח"ע וגם, אז $g = h$.

ב. אם $g \circ f = h \circ f$ וגם f חח"ע וגם g, h על, אז $g = h$.

ג. אם $f \circ f = I$, אז $f \circ f \circ f = I$.

ד. אם $f \circ f = f$, אז $f \circ f \circ f = f \circ f$.

8 תהי A קבוצה ו- B תת קבוצה, החלקית ממש ל- A , ונתונות הפונקציות

$$g(X) = X \cap B$$

$$f, g: P(A) \rightarrow P(A), \text{ המוגדרות באופן הבא: } f(X) = A - X$$

הוכיחו או הפריכו: $f \circ g$ על.

9 הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאה: הפונקציה $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, המוגדרת

$$\text{על-ידי } f((x, y)) = (3x + 4y, 4x + 5y), \text{ היא פונקציה הפיכה.}$$

10 תהי $P_{\text{even}}(\mathbb{N})$ קבוצת כל התת קבוצות של $\mathbb{N}$ שעוצמתן זוגית,

ותהי $P_{\text{odd}}(\mathbb{N})$ קבוצת כל התת קבוצות של $\mathbb{N}$ שעוצמתן אי-זוגית.

$$\text{לדוגמה, } \{1, 3\} \in P_{\text{even}}(\mathbb{N}), \{1, 3\} \notin P_{\text{odd}}(\mathbb{N})$$

$$\text{ולעומת זאת } \{2, 4, 6\} \notin P_{\text{even}}(\mathbb{N}), \{2, 4, 6\} \in P_{\text{odd}}(\mathbb{N})$$

לכל קבוצה A סופית של טבעיים, נסמן ב- $\max(A)$ את המספר הגדול ביותר

$$\text{ב-} A \text{ וב-} \max(\emptyset) = 0.$$

הוכיחו כי הפונקציה $f: P_{\text{even}}(\mathbb{N}) \rightarrow P_{\text{odd}}(\mathbb{N})$, המוגדרת על ידי

$$f(A) = A \cup \max(A), \text{ היא חח"ע אך אינה על.}$$

11 נגדיר פונקציה $F: \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow P(\{0, 1\} \times \{0, 1\})$, באופן הבא:

$$F(g) = \{(g(n), g(n+1)) \mid n \in \mathbb{N}\}$$

הוכיחו כי F אינה על.

12 נגדיר פונקציה $h: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ כך: $h(x) = 2x$.

$$\text{הוכיחו כי } \{f \circ h \mid f \in \mathbb{N}^{\mathbb{Z}}\} = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$$

13 נגדיר את היחס R מעל $P(\mathbb{N})$ באופן הבא: $ARB \Leftrightarrow \exists b \in B (\forall a \in A (a < b))$.

בנו פונקציה $f: \mathbb{N} \rightarrow P(\mathbb{N})$, שמקיימת $\forall x, y \in \mathbb{N} (x < y \Leftrightarrow f(x) R f(y))$.

- 14) נתונות שלוש פונקציות $f, g, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. הוכיחו כי אם $f \circ g$ חח"ע וגם $g \circ h$ חח"ע וגם $h \circ g \circ f$ על, אז f, g, h שלושתן הפיכות.
- 15) בנו באופן מפורש תת קבוצה של $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ ששקולה ל- $\mathbb{N}$.
- 16) נגדיר את $F: \mathbb{N}^{\mathbb{R}} \rightarrow P(\mathbb{N})$ באופן הבא: $F(f) = \{n \in \mathbb{R} \mid f(x) = 1\}$. הוכיחו כי F אינה חח"ע.
- 17) נגדיר פונקציה $F: \{0,1,2\}^{\mathbb{N}} \rightarrow P(\mathbb{N})$ באופן הבא: $F(f) = \{n \in \mathbb{N} \mid f(n) = 0\}$. קבעו האם F חח"ע ועל.
- 18) תהי $\mathbb{N}$ הטבעיים ותהי $B \subseteq \mathbb{N}$ תת קבוצה סופית לא ריקה נתונה. לדוגמה, עבור $B = \{1, 2\}$ מתקיים $f(\{2, 3\}) = \{3\}$, $f(\{3, 4\}) = \{1, 2, 3, 4\}$.
 א. הוכיחו כי אם $X \cap B = \emptyset$, אז $f(f(X)) = X$.
 ב. הוכיחו כי אם $B \subseteq X$, אז $f(f(X)) = X$.
 ג. הוכיחו כי אם X שייכת לתמונה של הפונקציה, אז $f(f(X)) = X$.
 ד. האם הפונקציה חח"ע?
 ה. האם הפונקציה על?
 ו. מה העוצמה של התמונה של הפונקציה?

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר Gool.co.il