

# סדנת ריענון במתמטיקה

פרק 6 - פונקציות ישן

תוכן העניינים

1. פונקציות.....1

## פונקציות

## שאלות

$$(1) \text{ יהיו } f \text{ ו-} g \text{ פונקציות מ-} \mathbb{N} \text{ ל-} \mathbb{N}, \text{ כאשר } f(n) = \begin{cases} \frac{n+1}{2} & \text{odd} \\ n-1 & \text{even} \end{cases}$$

$$\text{ו-} g(n) = 2n-1 \text{ לכל } n \in \mathbb{N}.$$

הוכיחו או הפריכו:

- א.  $f$  חח"ע.
- ב.  $g$  חח"ע.
- ג.  $f$  על  $\mathbb{N}$ .
- ד.  $g$  על  $\mathbb{N}$ .
- ה.  $f \circ g$  פונקציית הזהות על  $\mathbb{N}$ .
- ו.  $g \circ f$  פונקציית הזהות על  $\mathbb{N}$ .

(2) קבעו האם הפונקציות הבאות חח"ע ועל. נמקו.

$$\text{א. } f_1(x) = \frac{2x}{x+3}, f_1: (0, \infty) \rightarrow (0, 2)$$

$$\text{ב. } f_2(x) = x + \frac{1}{x}, f_2: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$$

$$\text{ג. } f_3(x) = x - \frac{1}{x}, f_3: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{ד. } f_4(X) = X \cap \mathbb{Z}, f_4: P(\mathbb{R}) \rightarrow P(\mathbb{R})$$

$$\text{ה. } f_5(X) = X \cap \mathbb{Z}, f_5: P(\mathbb{R}) \rightarrow P(\mathbb{Z})$$

$$\text{ו. } f_7(X) = X \Delta \mathbb{Z}, f_7: P(\mathbb{R}) \rightarrow P(\mathbb{R})$$

$$\text{ז. } f_8(n) = \text{the sum of the digits of } n, f_8: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

(3) יהיו  $g: A \rightarrow B, f: B \rightarrow C$  שתי פונקציות (כמובן שבתנאים אלו  $f \circ g: A \rightarrow C$ ), הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

(במקרה של הפרכה בחרו  $A = B = C = \mathbb{N}$ )

- א. אם  $f$  חח"ע וגם  $g$  חח"ע, אז  $f \circ g$  חח"ע.
- ב. אם  $f \circ g$  חח"ע, אז  $f$  חח"ע.
- ג. אם  $f \circ g$  חח"ע, אז  $g$  חח"ע.
- ד. אם  $f$  על וגם  $g$  על, אז  $f \circ g$  על.
- ה. אם  $f \circ g$  על, אז  $f$  על.
- ו. אם  $f \circ g$  על, אז  $g$  על.
- ז. אם  $f \circ g$  חח"ע וגם  $g$  על, אז  $f$  חח"ע.
- ח. אם  $f \circ g$  על וגם  $f$  חח"ע, אז  $g$  על.
- ט. אם  $f$  לא חח"ע וגם  $g$  לא על, אז  $f \circ g$  לא חח"ע או  $f \circ g$  לא על.

(4) תהי  $A$  קבוצה כלשהי ותהיינה  $f, g, h: A \rightarrow A$  הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

- א. אם  $g \circ f = h \circ f$ , אז  $g = h$ .
- ב. אם  $g \circ f = h \circ f$  וגם  $f$  על, אז  $g = h$ .
- ג. אם  $g \circ f = h \circ f$  וגם  $f$  חח"ע, אז  $g = h$ .
- ד. אם  $f \circ g = f \circ h$ , אז  $g = h$ .
- ה. אם  $f \circ g = f \circ h$  וגם  $f$  חח"ע, אז  $g = h$ .
- ו. אם  $f \circ g = f \circ h$  וגם  $f$  על, אז  $g = h$ .

(5) נתונות פונקציה  $f: A \rightarrow B$  וקבוצות  $C, D \subseteq A$ .

- א. הוכיחו כי  $f(C \cap D) \subseteq f(C) \cap f(D)$ .
- ב. הוכיחו שאם  $f$  חח"ע, אז  $f(C \cap D) = f(C) \cap f(D)$ .
- ג. הדגימו קבוצות  $C, D \subseteq \mathbb{N}$  ופונקציה  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , כך ש- $f$  על וגם  $f(C \cap D) \subset f(C) \cap f(D)$ .
- ד. הוכיחו כי  $f(C \cup D) = f(C) \cup f(D)$ .

(6) תהי  $A$  קבוצה ותהי  $f: A \rightarrow A$  פונקציה. הוכיחו או הפריכו:

- א. אם  $f \circ f = f$ , אז  $f = I$ .
- ב. אם  $f \circ f = f$ , אז  $f = I$  או ש- $f$  פונקציה קבועה.
- ג. אם  $f \circ f = f$  וגם  $f$  חח"ע, אז  $f = I$ .
- ד. אם  $f \circ f = f$  וגם  $f$  על, אז  $f = I$ .

(7) יהיו  $f, g, h: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ .

הפריכו (שאלה קשה מאוד):

א. אם  $f \circ g = f \circ h$  וגם  $f$  על וגם  $g, h$  חח"ע וגם, אז  $g = h$ .

ב. אם  $g \circ f = h \circ f$  וגם  $f$  חח"ע וגם  $g, h$  על, אז  $g = h$ .

ג. אם  $f \circ f = I$ , אז  $f \circ f \circ f = I$ .

ד. אם  $f \circ f = f$ , אז  $f \circ f \circ f = f \circ f$ .

(8) תהי  $A$  קבוצה ו- $B$  תת קבוצה, החלקית ממש ל- $A$ , ונתונות הפונקציות

$$g(X) = X \cap B$$

$f, g: P(A) \rightarrow P(A)$ , המוגדרות באופן הבא:

$$f(X) = A - X$$

הוכיחו או הפריכו:  $f \circ g$  על.

(9) הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאה: הפונקציה  $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , המוגדרת

$$\text{על-ידי } f((x, y)) = (3x + 4y, 4x + 5y), \text{ היא פונקציה הפיכה.}$$

(10) תהי  $P_{\text{even}}(\mathbb{N})$  קבוצת כל התת קבוצות של  $\mathbb{N}$  שעוצמתן זוגית,

ותהי  $P_{\text{odd}}(\mathbb{N})$  קבוצת כל התת קבוצות של  $\mathbb{N}$  שעוצמתן אי-זוגית.

לדוגמה,  $\{1, 3\} \in P_{\text{even}}(\mathbb{N}), \{1, 3\} \notin P_{\text{odd}}(\mathbb{N})$ ,

ולעומת זאת  $\{2, 4, 6\} \notin P_{\text{even}}(\mathbb{N}), \{2, 4, 6\} \in P_{\text{odd}}(\mathbb{N})$ .

לכל קבוצה  $A$  סופית של טבעיים, נסמן ב- $\max(A)$  את המספר הגדול ביותר

ב- $A$  וב- $\max(\emptyset) = 0$ .

הוכיחו כי הפונקציה  $f: P_{\text{even}}(\mathbb{N}) \rightarrow P_{\text{odd}}(\mathbb{N})$ , המוגדרת על ידי

$$f(A) = A \cup \max(A), \text{ היא חח"ע אך אינה על.}$$

(11) נגדיר פונקציה  $F: \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow P(\{0, 1\} \times \{0, 1\})$  באופן הבא:

$$F(g) = \{(g(n), g(n+1)) \mid n \in \mathbb{N}\}$$

הוכיחו כי  $F$  אינה על.

(12) נגדיר פונקציה  $h: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$  כך:  $h(x) = 2x$ .

$$\{f \circ h \mid f \in \mathbb{N}^{\mathbb{Z}}\} = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$$

(13) נגדיר את היחס  $R$  מעל  $P(\mathbb{N})$  באופן הבא:  $ARB \Leftrightarrow \exists b \in B (\forall a \in A (a < b))$

בנו פונקציה  $f: \mathbb{N} \rightarrow P(\mathbb{N})$ , שמקיימת  $\forall x, y \in \mathbb{N} (x < y \Leftrightarrow f(x) R f(y))$ .

- 14) נתונות שלוש פונקציות  $f, g, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . הוכיחו כי אם  $f \circ g$  חחי"ע וגם  $g \circ h$  חחי"ע וגם  $h \circ g \circ f$  על, אז  $f, g, h$  שלושתן הפיכות.
- 15) בנו באופן מפורש תת קבוצה של  $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$  ששקולה ל- $\mathbb{N}$ .
- 16) נגדיר את  $F: \mathbb{N}^{\mathbb{R}} \rightarrow P(\mathbb{N})$  באופן הבא:  $F(f) = \{n \in \mathbb{R} \mid f(x) = 1\}$ . הוכיחו כי  $F$  אינה חחי"ע.
- 17) נגדיר פונקציה  $F: \{0,1,2\}^{\mathbb{N}} \rightarrow P(\mathbb{N})$  באופן הבא:  $F(f) = \{n \in \mathbb{N} \mid f(n) = 0\}$ . קבעו האם  $F$  חחי"ע ועל.
- 18) תהי  $\mathbb{N}$  הטבעיים ותהי  $B \subseteq \mathbb{N}$  תת קבוצה סופית לא ריקה נתונה. לדוגמה, עבור  $B = \{1,2\}$  מתקיים  $f(\{2,3\}) = \{3\}$ ,  $f(\{3,4\}) = \{1,2,3,4\}$ .
- א. הוכיחו כי אם  $X \cap B = \emptyset$ , אז  $f(f(X)) = X$ .
- ב. הוכיחו כי אם  $B \subseteq X$ , אז  $f(f(X)) = X$ .
- ג. הוכיחו כי אם  $X$  שייכת לתמונה של הפונקציה, אז  $f(f(X)) = X$ .
- ד. האם הפונקציה חחי"ע?
- ה. האם הפונקציה על?
- ו. מה העוצמה של התמונה של הפונקציה?

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר [Gool.co.il](http://Gool.co.il)