סדנת ריענון במתמטיקה

פרק 6 - פונקציות ישן

תוכן העניינים

פונקציות

שאלות

1) יהיו f ו- g פונקציות מ- $\mathbb{N}$ ל- $\mathbb{N}$, כאשר $f(n)=\begin{cases}\frac{n+1}{2} & \text{odd}\\ n-1 & \text{even}\end{cases}$,

ו- $g(n)=2n-1$ לכל $n\in\mathbb{N}$.

הוכיחו או הפריכו:

א. f חח"ע.

ב. g חח"ע.

ג. f על $\mathbb{N}$.

ד. g על $\mathbb{N}$.

ה. $f\circ g$ פונקציית הזהות על $\mathbb{N}$.

ו. $g\circ f$ פונקציית הזהות על $\mathbb{N}$.

2) קבעו האם הפונקציות הבאות חח"ע ועל. נמקו.

א. $f_1:(0,\infty)\to(0,2)$, $f_1(x)=\dfrac{2x}{x+3}$

ב. $f_2:(0,\infty)\to(0,\infty)$, $f_2(x)=x+\dfrac{1}{x}$

ג. $f_3:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f_3(x)=x-\dfrac{1}{x}$

ד. $f_4:P(\mathbb{R})\to P(\mathbb{R})$, $f_4(X)=X\cap\mathbb{Z}$

ה. $f_5:P(\mathbb{R})\to P(\mathbb{Z})$, $f_5(X)=X\cap\mathbb{Z}$

ו. $f_7:P(\mathbb{R})\to P(\mathbb{R})$, $f_7(X)=X\Delta\mathbb{Z}$

ז. $f_8:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, $f_8(n)=\text{the sum of the digits of } n$

3) יהיו $g:A\to B, f:B\to C$ שתי פונקציות (כמובן שבתנאים אלו $f\circ g:A\to C$),
הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות :
(במקרה של הפרכה בחרו $A=B=C=\mathbb{N}$)

א. אם f חח"ע וגם g חח"ע, אז $f\circ g$ חח"ע.
ב. אם $f\circ g$ חח"ע, אז f חח"ע.
ג. אם $f\circ g$ חח"ע, אז g חח"ע.
ד. אם f על וגם g על, אז $f\circ g$ על.
ה. אם $f\circ g$ על, אז f על.
ו. אם $f\circ g$ על, אז g על.
ז. אם $f\circ g$ חח"ע וגם g על, אז f חח"ע.
ח. אם $f\circ g$ על וגם f חח"ע, אז g על.
ט. אם f לא חח"ע וגם g לא על, אז $f\circ g$ לא חח"ע או $f\circ g$ לא על.

4) תהי A קבוצה כלשהי ותהיינה $f,g,h:A\to A$.
הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות :

א. אם $g\circ f=h\circ f$, אז $g=h$.
ב. אם $g\circ f=h\circ f$ וגם f על, אז $g=h$.
ג. אם $g\circ f=h\circ f$ וגם f חח"ע, אז $g=h$.
ד. אם $f\circ g=f\circ h$, אז $g=h$.
ה. אם $f\circ g=f\circ h$ וגם f חח"ע, אז $g=h$.
ו. אם $f\circ g=f\circ h$ וגם f על, אז $g=h$.

5) נתונות פונקציה $f:A\to B$ וקבוצות $C,D\subseteq A$.

א. הוכיחו כי $f(C\cap D)\subseteq f(C)\cap f(D)$.
ב. הוכיחו שאם f חח"ע, אז $f(C\cap D)=f(C)\cap f(D)$.
ג. הדגימו קבוצות $C,D\subseteq\mathbb{N}$ ופונקציה $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, כך ש- f על וגם $f(C\cap D)\subset f(C)\cap f(D)$.
ד. הוכיחו כי $f(C\cup D)=f(C)\cup f(D)$.

6) תהי A קבוצה ותהי $f:A\to A$ פונקציה.
הוכיחו או הפריכו :

א. אם $f\circ f=f$, אז $f=I$.
ב. אם $f\circ f=f$, אז $f=I$ או ש- f פונקציה קבועה.
ג. אם $f\circ f=f$ וגם f חח"ע, אז $f=I$.
ד. אם $f\circ f=f$ וגם f על, אז $f=I$.

7) יהיו $f,g,h:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$.
הפריכו (שאלה קשה מאוד):
א. אם $f\circ g=f\circ h$ וגם f על וגם g,h חח"ע וגם, אז $g=h$.
ב. אם $g\circ f=h\circ f$ וגם f חח"ע וגם g,h על, אז $g=h$.
ג. אם $f\circ f\circ f=I$, אז $f\circ f=I$.
ד. אם $f\circ f\circ f=f\circ f$, אז $f\circ f=f$.

8) תהי A קבוצה ו-B תת קבוצה, החלקית **ממש** ל-A, ונתונות הפונקציות $f,g:P(A)\to P(A)$, המוגדרות באופן הבא: $\begin{matrix} g(X)=X\cap B \\ f(X)=A-X \end{matrix}$.
הוכיחו או הפריכו: $f\circ g$ על.

9) הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאה: הפונקציה $f;\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, המוגדרת על-ידי $f((x,y))=(3x+4y,4x+5y)$, היא פונקציה הפיכה.

10) תהי $P_{even}(\mathbb{N})$ קבוצת כל התת קבוצות של $\mathbb{N}$ שעוצמתן זוגית,
ותהי $P_{odd}(\mathbb{N})$ קבוצת כל התת קבוצות של $\mathbb{N}$ שעוצמתן אי-זוגית.
לדוגמה, $\{1,3\}\in P_{even}(\mathbb{N}),\{1,3\}\notin P_{odd}(\mathbb{N})$,
ולעומת זאת $\{2,4,6\}\notin P_{even}(\mathbb{N}),\{2,4,6\}\in P_{odd}(\mathbb{N})$.
לכל קבוצה A סופית של טבעיים, נסמן ב-$\max(A)$ את המספר הגדול ביותר ב-A וב-0 $\max(\varnothing)=0$.
הוכיחו כי הפונקציה $f:P_{even}(\mathbb{N})\to P_{odd}(\mathbb{N})$, המוגדרת על ידי $f(A)=A\cup\max(A)$, היא חח"ע אך אינה על.

11) נגדיר פונקציה $F:\{0,1\}^{\mathbb{N}}\to P(\{0,1\}\times\{0,1\})$, באופן הבא:
$F(g)=\{(g(n),g(n+1))|n\in\mathbb{N}\}$.
הוכיחו כי F אינה על.

12) נגדיר פונקציה $h:\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$ כך: $h(x)=2x$.
הוכיחו כי $\{f\circ h|f\in\mathbb{N}^{\mathbb{Z}}\}=\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

13) נגדיר את היחס R מעל $P(\mathbb{N})$ באופן הבא: $ARB\Leftrightarrow\exists b\in B(\forall a\in A(a<b))$.
בנו פונקציה $f:\mathbb{N}\to P(\mathbb{N})$, שמקיימת $\forall x,y\in\mathbb{N}(x<y\leftrightarrow f(x)Rf(y))$.

14) נתונות שלוש פונקציות $f,g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.
הוכיחו כי אם $f\circ g$ חח"ע וגם $g\circ h$ חח"ע וגם $h\circ g\circ f$ על,
אז f,g,h שלושתן הפיכות.

15) בנו באופן מפורש תת קבוצה של $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ ששקולה ל- $\mathbb{N}$.

16) נגדיר את $F:\mathbb{N}^{\mathbb{R}}\to P(\mathbb{N})$ באופן הבא: $F(f)=\{n\in\mathbb{R}\,|\,f(x)=1\}$.
הוכיחו כי F אינה חח"ע.

17) נגדיר פונקציה $F:\{0,1,2\}^{\mathbb{N}}\to P(\mathbb{N})$ באופן הבא: $F(f)=\{n\in\mathbb{N}\,|\,f(n)=0\}$.
קבעו האם F חח"ע ועל.

18) תהי $\mathbb{N}$ הטבעיים ותהי $B\subseteq\mathbb{N}$ תת קבוצה סופית לא ריקה נתונה.
לדוגמה, עבור $B=\{1,2\}$ מתקיים $f(\{3,4\})=\{1,2,3,4\}$, $f(\{2,3\})=\{3\}$.
א. הוכיחו כי אם $X\cap B=\varnothing$, אז $f(f(X))=X$.
ב. הוכיחו כי אם $B\subseteq X$, אז $f(f(X))=X$.
ג. הוכיחו כי אם X שייכת לתמונה של הפונקציה, אז $f(f(X))=X$.
ד. האם הפונקציה חח"ע?
ה. האם הפונקציה על?
ו. מה העוצמה של התמונה של הפונקציה?

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר Gool.co.il