

# מתמטיקה 1 55004

## פרק 11 - פונקציות של שני משתנים

### תוכן העניינים

- |    |                             |
|----|-----------------------------|
| 1. | מבוא לפונקציה של שני משתנים |
| 2. | נספח - משטחים ממעלה שנייה   |
| 3. |                             |

## מבוא לפונקציה של שני משתנים

### שאלות

עבור כל אחת מהפונקציות הבאות:

- מצאו את תחום ההגדרה  $D$  של הפונקציה.
- שרטטו סקיצה של הקבוצה  $D$ .

$$f(x, y) = \sqrt{5 - x^2 - y^2} + \ln(4y - x^2) \quad (1)$$

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 4} + \frac{1}{\sqrt{x}} \quad (2)$$

$$f(x, y) = \sqrt{-x^2 + y^2 + 1} + \frac{x + y}{x - y} \quad (3)$$

$$g(x, y) = \sqrt{x + 4y} + \sqrt{x - 4y} \quad (4)$$

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x + 4y}} + \frac{1}{\sqrt{x - 4y}} \quad (5)$$

$$h(x, y) = \sqrt{x - \sqrt{y + 4}} \quad (6)$$

$$f(x, y) = e^{xy} \sqrt{\ln \frac{4}{x^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + y^2 - 4}} \quad (7)$$

$$z(x, y) = \frac{4}{\sqrt{1 - |x| - |y|}} \quad (8)$$

$$z(x, y) = \ln \left( \frac{x - 4y}{x + 4y} \right) \quad (9)$$

$$f(x, y) = \ln [x \ln(y - 4x)] \quad (10)$$

$$u(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x+4}} + \frac{1}{\sqrt{y-1}} + \frac{1}{\sqrt{z}} \quad (11)$$

### תשובות סופיות

$$D = \left\{ (x, y) \mid \frac{1}{4}x^2 \leq y \leq \sqrt{5-x^2} \right\} \quad (1)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid x^2 + y^2 \geq 4, x > 0 \right\} \quad (2)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid x^2 - y^2 \leq 1, y \neq x \right\} \quad (3)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid -\frac{1}{4}x \leq y \leq \frac{1}{4}x \right\} \quad (4)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid -\frac{1}{4}x < y < \frac{1}{4}x \right\} \quad (5)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid -4 \leq y \leq x^2 - 4, x \geq 0 \right\} \quad (6)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid x^2 + y^2 = 4 \right\} \quad (7)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid |x| + |y| < 1 \right\} \quad (8)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid \frac{1}{4}x < y < -\frac{1}{4}x \text{ or } -\frac{1}{4}x < y < \frac{1}{4}x \right\} \quad (9)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid [x < 0 \text{ and } 4x < y < 4x + 1] \text{ or } [x > 0 \text{ and } y > 4x + 1] \right\} \quad (10)$$

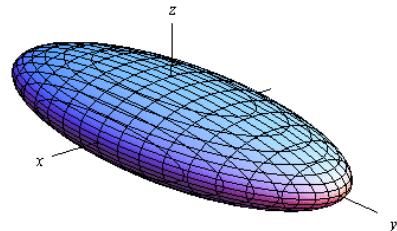
$$D = \left\{ (x, y, z) \mid x > -4, y > 1, z > 0 \right\} \quad (11)$$

## נספח – משטחים ממעלת שנייה

משוואה:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

תיאור: החתכים במישורי הקואורדינטות הם אליפסות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים. אם  $a=b=c$ , נקבל פזרע עם רדיוס  $a$  והחתכים הנילhim מוגלים.

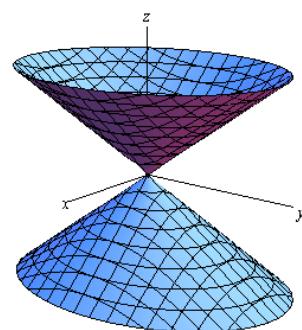
### אליפסואיד



משוואה:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$

תיאור: החתך במישור  $xy$  הוא נקודה (הראשית); החתכים במישורים מקבילים למישור  $xy$  הם אליפסות. החתכים במישור  $zx$  ו-  $zy$  הם זוג ישרים החתכים בראשית; החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו הם היפרבולות.  
 \* מרכז החגורות הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע בלבד באחד האגפים.

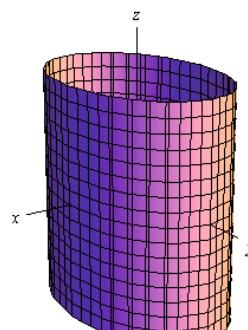
### חרוט אליפטי



משוואה:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

תיאור: החתך במישור  $xy$  הוא אליפסה; כך הם החתכים במישורים מקבילים למישור  $xy$ . החתכים במישור  $zx$  ו-  $zy$  הם זוג ישרים מקבילים וכך הם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו. במידה ומשוואת הגליל היא  $r^2 = x^2 + y^2$ , החתכים הנילhim מוגלים.  
 \* מרכז הגליל הוא על הציר המתאים למשתנה שאינו מופיע

### גליל אליפטי



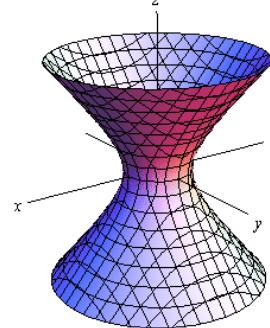
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

משוואת :

תיאור : החתך במישור  $yx$  הוא אליפסה ; כך הם החתכים במישורים מקבילים למישור  $yx$ . החתכים במישור  $zx$  ו-  $zy$  הם היפרבולות ; כך גם החתכים במישורים מקבילים למישוריים אלו.

\* מרכז היפרבולואיד חד-יריעתי הוא על הציר המתאים

### היפרבולואיד חד-יריעתי



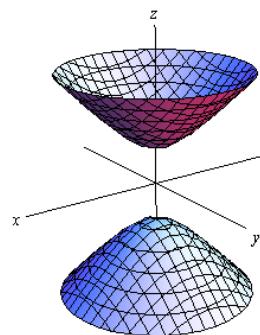
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

משוואת :

תיאור : למשטח זה אין חתך במישור  $yx$  ; החתכים במישורים מקבילים למישור  $yx$  , החותכים את המשטח, הם אליפסות. החתכים במישור  $zx$  ו-  $zy$  הם היפרבולות ; כך גם החתכים במישורים מקבילים למישוריים אלו.

\* מרכז היפרבולואיד דו-יריעתי הוא על הציר המתאים

### היפרבולואיד דו-יריעתי



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$$

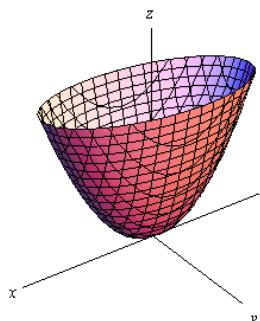
משוואת :

תיאור : החתך במישור  $yx$  הוא נקודה (הריאשית) ; החתכים במישורים מקבילים למישור  $yx$  ונמצאים מעליו הם אליפסות. החתכים במישור  $zx$  ו-  $zy$  הם פרבולות ; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישוריים אלו.

\* מרכז הפרבולואיד האליפטי הוא על הציר המתאים למשנה המופיע ללא ריבוע.

\* אם  $c > 0$  הפרבולואיד נפתח כלפי מעלה ואם  $c < 0$  נפתח כלפי מטה.

### פרבולואיד אליפטי



...

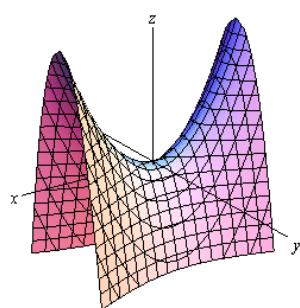
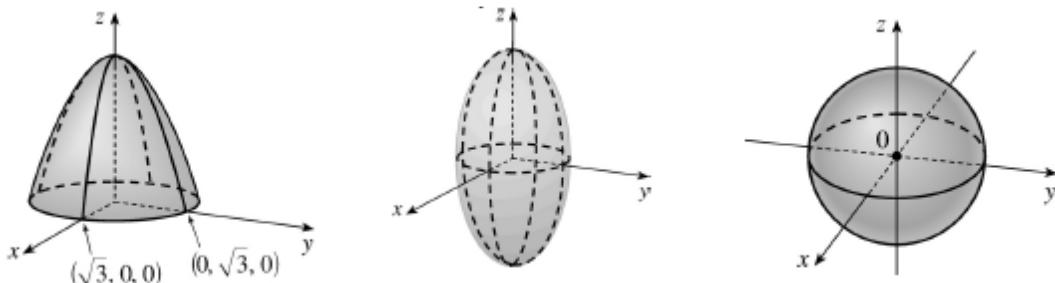
משוואת:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$$

תיאור: החתך במישור  $xy$  הוא זוג ישרים נחתכים בראשית; החתכים במישורים מקבילים למישור  $xy$  הם היפרבולות; אלו מעל למישור  $xy$  נפתחות בכיוון ציר  $-y$  ואלו מתחת למישור  $xy$  נפתחות בכיוון ציר  $x$ . החתכים במישור  $zx$  ו-  $zy$  הם פרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

\* מרכזו הפרבולואיד האליפטי הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע ללא ריבוע.

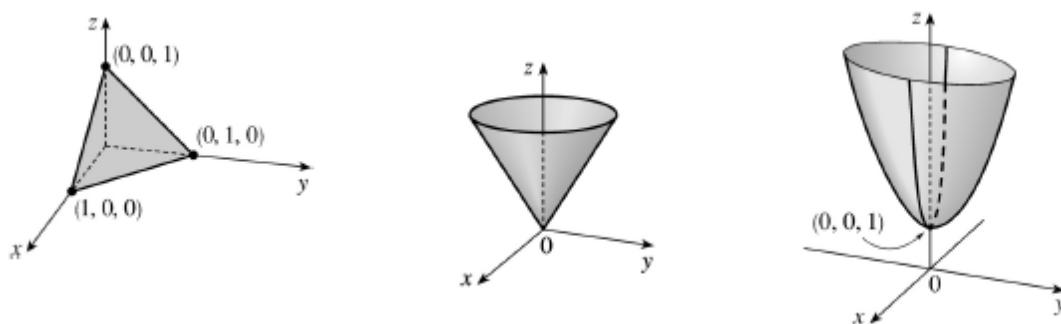
\* אם  $c > 0$  הפרבולואיד נפתח כלפי מעלה ואם  $c < 0$

**פרבולואיד היפרבולי****דוגמאות שונות**

$$z = 3 - x^2 - y^2$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{16} = 1$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$



$$x + y + z = 1$$

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$z = 4x^2 + y^2 + 1$$

