

# חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי ב

פרק 10 - פונקציות של מספר משתנים - מבוא, קווי גובה

תוכן העניינים

1. מבוא לפונקציה של שני משתנים ..... 1
2. קווי גובה לפונקציה של שני משתנים ..... 3
3. נספח – משטחים ממעלה שנייה ..... 5

## מבוא לפונקציה של שני משתנים

עבור כל אחת מהפונקציות הבאות:

א. מצאו את תחום ההגדרה  $D$  של הפונקציה.

ב. שרטטו סקיזה של הקבוצה  $D$ .

$$f(x, y) = \sqrt{5 - x^2 - y^2} + \ln(4y - x^2) \quad (1)$$

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 4} + \frac{1}{\sqrt{x}} \quad (2)$$

$$f(x, y) = \sqrt{-x^2 + y^2 + 1} + \frac{x + y}{x - y} \quad (3)$$

$$g(x, y) = \sqrt{x + 4y} + \sqrt{x - 4y} \quad (4)$$

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x + 4y}} + \frac{1}{\sqrt{x - 4y}} \quad (5)$$

$$h(x, y) = \sqrt{x - \sqrt{y + 4}} \quad (6)$$

$$f(x, y) = e^{xy} \sqrt{\ln \frac{4}{x^2 + y^2}} + \sqrt{x^2 + y^2 - 4} \quad (7)$$

$$z(x, y) = \frac{4}{\sqrt{1 - |x| - |y|}} \quad (8)$$

$$z(x, y) = \ln \left( \frac{x - 4y}{x + 4y} \right) \quad (9)$$

$$f(x, y) = \ln[x \ln(y - 4x)] \quad (10)$$

$$u(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x+4}} + \frac{1}{\sqrt{y-1}} + \frac{1}{\sqrt{z}} \quad (11)$$

(ענו על סעיף א בלבד)

$$f(x, y) = \tan \frac{y}{x} \quad (12)$$

(רק לתלמידי מדעים מדויקים/הנדסה)

$$f(x, y) = \frac{\arcsin\left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}y^2\right)}{\ln(x^2 + y^2 - 1)} \quad (13)$$

(רק לתלמידי מדעים מדויקים/הנדסה)

### תשובות סופיות

$$D = \left\{ (x, y) \mid \frac{1}{4}x^2 \leq y \leq \sqrt{5-x^2} \right\} \quad (1)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid x^2 + y^2 \geq 4, x > 0 \right\} \quad (2)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid x^2 - y^2 \leq 1, y \neq x \right\} \quad (3)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid -\frac{1}{4}x \leq y \leq \frac{1}{4}x \right\} \quad (4)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid -\frac{1}{4}x < y < \frac{1}{4}x \right\} \quad (5)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid -4 \leq y \leq x^2 - 4, x \geq 0 \right\} \quad (6)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid x^2 + y^2 = 4 \right\} \quad (7)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid |x| + |y| < 1 \right\} \quad (8)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid \frac{1}{4}x < y < -\frac{1}{4}x \text{ or } -\frac{1}{4}x < y < \frac{1}{4}x \right\} \quad (9)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid [x < 0 \text{ and } 4x < y < 4x + 1] \text{ or } [x > 0 \text{ and } y > 4x + 1] \right\} \quad (10)$$

$$D = \left\{ (x, y, z) \mid x > -4, y > 1, z > 0 \right\} \quad (11)$$

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0, y \neq \left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right)x, k \in \mathbb{Z} \right\} \quad (12)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid 1 < x^2 + y^2 \neq 2 < 4 \right\} \quad (13)$$

## קווי גובה לפונקציה של שני משתנים

עבור כל אחת מהפונקציות בשאלות 1-6, מצאו תחום הגדרה, שרטטו אותו, ושרטטו את מפת קווי הגובה/רמה של הפונקציה:

$$f(x, y) = \frac{y}{x} \quad (1)$$

$$f(x, y) = \ln x + \ln y \quad (2)$$

$$f(x, y) = x^2 + y^2 \quad (3)$$

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \quad (4)$$

$$f(x, y) = \ln(x^2 - y) \quad (5)$$

$$f(x, y) = x\sqrt{y} \quad (6)$$

עבור כל אחת מהפונקציות בשאלות 7-10 שרטטו מפת קווי גובה:

$$f(x, y) = (x-1)^2 + (y+3)^2 \quad (7)$$

$$f(x, y) = e^{x-y} \quad (8)$$

$$f(x, y) = 2 \ln x + \ln y \quad (9)$$

$$f(x, y) = \min\{3x, y\} \quad (10)$$

עבור כל אחת מהפונקציות בשאלות 11-13, שרטטו את קו הגובה  $k$ :

$$(k = 0, 4) \quad f(x, y) = (x - y)^2 \quad (11)$$

$$(k = 0, 2) \quad f(x, y) = \min\{y - x^2, x + y\} \quad (12)$$

$$(k = 1) \quad f(x, y) = \begin{cases} x^2 + 3x - y - 3 & x^2 \geq y \\ -x^2 + 3x + y - 3 & x^2 < y \end{cases} \quad (13)$$

$$(14) \text{ נתונה הפונקציה } f(x, y) = \begin{cases} x^2 - y & x \leq 1 \\ 2x + y & x > 1 \end{cases}$$

- א. שרטטו את קו הגובה  $f(x, y) = 0$ .
- ב. לאילו ערכי  $C$  קו הגובה  $f(x, y) = C$  הוא קו רציף?  
 ציירו את קו הגובה במקרה זה.

### הערות

- \* בסוף קובץ זה תמצאו סיכום של כל המשטחים הנפוצים.
- \*\* קווי גובה = קווי רמה = עקומות אדישות = עקומות שוות ערך.

### תשובות סופיות

- (1)  $x \neq 0$ , המישור ללא ציר ה- $y$ .
- (2)  $x > 0, y > 0$ , הרביע הראשון ללא הצירים.
- (3) כל המישור.
- (4)  $x^2 + y^2 \leq 1$ , עיגול היחידה.
- (5)  $y < x^2$
- (6)  $y \geq 0$ , חצי המישור העליון.

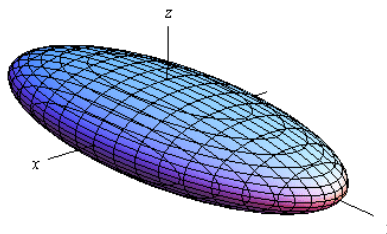
לפתרונות מלאים ושרטוטים של שאר השאלות, היכנסו לאתר: [GooL.co.il](http://GooL.co.il)

## נספח – משטחים ממעלה שנייה

אליפסואיד

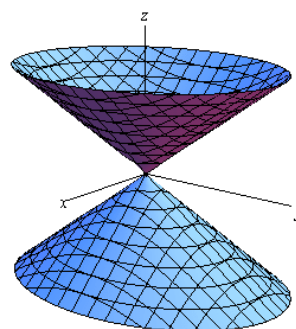
$$\text{משוואה: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

תיאור: החתכים במישורי הקואורדינטות הם אליפסות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים. אם  $a=b=c$ , נקבל כדור עם רדיוס  $a$  והחתכים הנ"ל הם מעגלים.

חרוט אליפטי

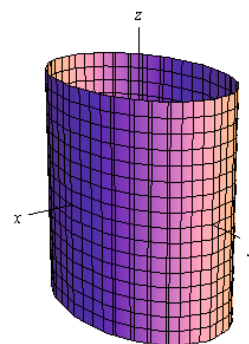
$$\text{משוואה: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$$

תיאור: החתך במישור  $xy$  הוא נקודה (הראשית); החתכים במישורים מקבילים למישור  $xy$  הם אליפסות. החתכים במישור  $xz$  ו-  $yz$  הם זוג ישרים הנחתכים בראשית; החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו הם היפרבולות. \* מרכז החרוט הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע לבד באחד האגפים.

גליל אליפטי

$$\text{משוואה: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

תיאור: החתך במישור  $xy$  הוא אליפסה; כך הם החתכים במישורים מקבילים למישור  $xy$ . החתכים במישור  $xz$  ו-  $yz$  הם זוג ישרים מקבילים וכך הם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו. במידה ומשוואת הגליל היא  $x^2 + y^2 = r^2$ , החתכים הנ"ל הם מעגלים. \* מרכז הגליל הוא על הציר המתאים למשתנה שאינו מופיע במשוואת הגליל.

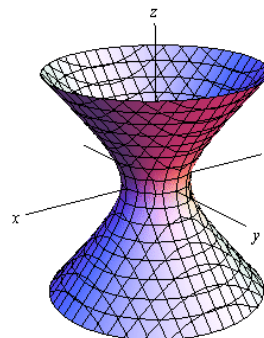


### היפרבולואיד חד-יריעתי

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 : \text{משוואה}$$

**תיאור:** החתך במישור  $xy$  הוא אליפסה; כך הם החתכים במישורים מקבילים למישור  $xy$ . החתכים במישור  $xz$  ו-  $yz$  הם היפרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

\* מרכז היפרבולואיד חד-יריעתי הוא על הציר המתאים למשתנה שלפניו המינוס.

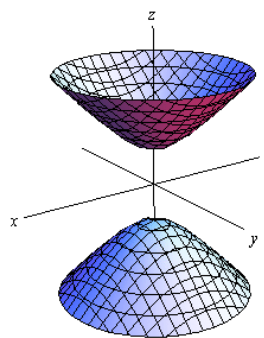


### היפרבולואיד דו-יריעתי

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 : \text{משוואה}$$

**תיאור:** למשטח זה אין חתך במישור  $xy$ ; החתכים במישורים מקבילים למישור  $xy$ , החותכים את המשטח, הם אליפסות. החתכים במישור  $xz$  ו-  $yz$  הם היפרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

\* מרכז היפרבולואיד דו-יריעתי הוא על הציר המתאים למשתנה שלפניו המינוס.



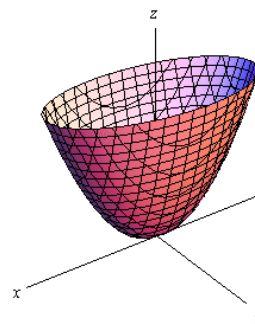
### פרבולואיד אליפטי

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c} : \text{משוואה}$$

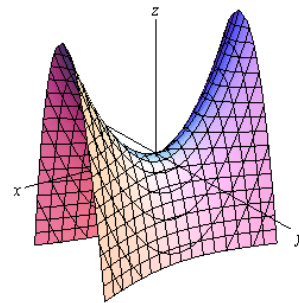
**תיאור:** החתך במישור  $xy$  הוא נקודה (הראשית); החתכים במישורים מקבילים למישור  $xy$  ונמצאים מעליו הם אליפסות. החתכים במישור  $xz$  ו-  $yz$  הם פרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

\* מרכז הפרבולואיד האליפטי הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע ללא ריבוע.

\* אם  $c > 0$  הפרבולואיד נפתח כלפי מעלה ואם  $c < 0$  הפרבולואיד נפתח כלפי מטה.



### פרבולואיד היפרבולי



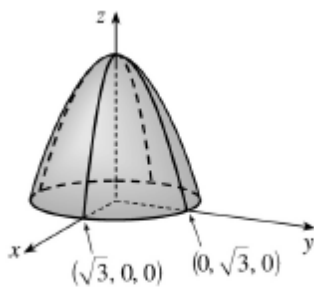
$$\text{משוואה: } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$$

**תיאור:** החתך במישור  $xy$  הוא זוג ישרים נחתכים בראשית; החתכים במישורים מקבילים למישור  $xy$  הם היפרבולות; אלו שמעל למישור  $xy$  נפתחות בכיוון ציר ה- $x$  ואלו שמתחת למישור  $xy$  נפתחות בכיוון ציר ה- $y$ . החתכים במישור  $xz$  ו- $yz$  הם פרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

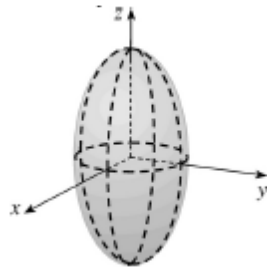
\* מרכז הפרבולואיד האליפטי הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע ללא ריבוע.

\* אם  $c > 0$  הפרבולואיד נפתח כלפי מעלה ואם  $c < 0$  הפרבולואיד נפתח כלפי מטה.

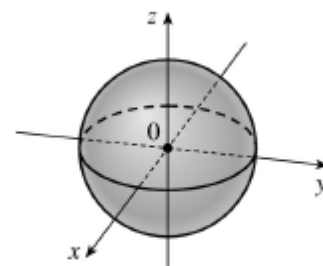
### דוגמאות שונות



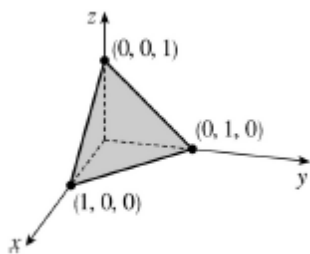
$$z = 3 - x^2 - y^2$$



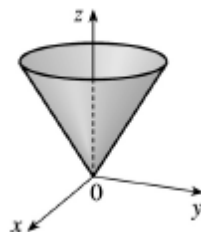
$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{16} = 1$$



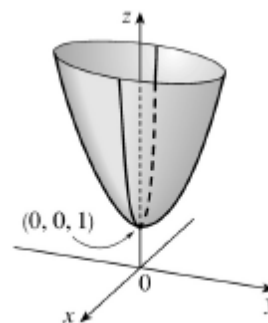
$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$



$$x + y + z = 1$$



$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$



$$z = 4x^2 + y^2 + 1$$