

# מתמטיקה לכלכלנים ב'

פרק 10 - פונקציות סתומות

תוכן העניינים

1. פונקציות סתומות - הפן הטכני ..... 1
2. פונקציות סתומות - הפן התאורטי ..... 4
3. שימושים גאומטריים ..... 11

## פונקציות סתומות – הפן הטכני

## שאלות

- (1) מצאו את  $y'$ , כאשר  $x^2 + y^5 = xy + 1$ ,  
וחשבו את  $y'(0)$ .
- (2) מצאו את  $y'(1)$ , כאשר  $e^{xy} + x^2y^2 = 5x - 4$ .
- (3) מצאו את  $y'(e)$ ,  $y''(e)$ , כאשר  $2\ln x + \ln y = 1$ .
- (4) נתון  $(z = z(x, y) \geq 0)$   $z^2 - e^{x^2+y^2} + (x+y)\sin z = 0$   
חשבו את  $\frac{\partial z}{\partial x}(0,0)$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y}(0,0)$ .
- (5) נתון  $(y = y(x, z) \geq 0)$   $z^2 - e^{x^2+y^2} + (x+y)\sin z = -e^4$   
חשבו את  $y_x(0,0)$ ,  $y_z(0,0)$ .
- (6) נתונה המשוואה  $x - y = x \cdot y \cdot f\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{z}\right)$   
הוכיחו כי  $x^2 \cdot z_x + y^2 \cdot z_y = z^2$ .
- (7) נתון  $(z = z(x, y) \geq 0)$   $z^3 - 2xz + y = 0$   
מצאו  $z_{xx}(1,1)$ .
- (8) נתונה משוואה  $z^3 - 3xyz = 4$  ונקודה  $(2,1,-2)$ . מצאו את:  
א.  $z_{xx}(2,1)$   
ב.  $z_{xy}(2,1)$   
ג.  $z_{yy}(2,1)$

$$(9) \quad \begin{cases} u^2 - v = 3x + y \\ u - 2v^2 = x - 2y \end{cases} \quad \text{נתונה מערכת משוואות:}$$

א. חשבו את  $u_x, v_x, u_y, v_y$ .

ב. הראו כי  $u_{xy} = u_{yx}$ .

\*הערה: בסעיף ב' אין להסתמך על משפט הנגזרות המעורבות.

$$(10) \quad \begin{cases} x = u + v \\ y = u^2 + v^2 \\ w = u^3 + v^3 \end{cases} \quad \text{נתונה מערכת משוואות:}$$

א. חשבו את  $w_x, w_y$ .

ב. חשבו  $y_x, y_w$ .

$$(11) \quad \begin{cases} xyz = 4 \\ x + y + z = 4 \end{cases} \quad \text{נתונה מערכת משוואות:}$$

הוכיחו כי  $z''(x) + y''(x) = 0$ .

$$(12) \quad \begin{cases} x \cos u + y \sin u + \ln z = f(u) \\ -x \sin u + y \cos u = f'(u) \end{cases} \quad \text{נתונה המערכת:}$$

הוכיחו כי:

$$א. \quad (z_x)^2 + (z_y)^2 = z^2$$

$$ב. \quad z_{xy} = z_{yx}$$

\*הערה: בסעיף ב' אין להסתמך על משפט הנגזרות המעורבות.

## תשובות סופיות

$$y'(0) = \frac{1}{5} \quad (1)$$

$$y'(1) = 5 \quad (2)$$

$$y'(e) = -\frac{2}{e^2}, y''(e) = \frac{6}{e^3} \quad (3)$$

$$z_x(0,0) = z_y(0,0) = -\frac{\sin 1}{2} \quad (4)$$

$$y_x(0,0) = 0, y_z(0,0) = \frac{1}{2e^4} \quad (5)$$

שאלת הוכחה. (6)

$$z_x(1,1) = -16 \quad (7)$$

$$z_{xx}(2,1) = z_{xy}(2,1) = 1, z_{yy}(2,1) = 4 \quad (8)$$

$$u_x = \frac{12v-1}{8uv-1}, u_y = \frac{4v+2}{8uv-1}, v_x = \frac{3-2u}{8uv-1}, v_y = \frac{4u+1}{8uv-1} \quad \left( uv \neq \frac{1}{8} \right). \text{א.} \quad (9)$$

ב. שאלת הוכחה.

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -3uv, \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{3}{2}(v+u) \quad (u \neq v). \text{א.} \quad (10)$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{2uv}{v+u}, \frac{\partial y}{\partial w} = \frac{2}{3(v+u)} \quad (u \neq \pm v). \text{ב.}$$

שאלת הוכחה. (11)

שאלת הוכחה. (12)

## פונקציות סתומות – הפן התאורטי

### שאלות

(1) נתונה המשוואה  $y^5 + y^3 + y = x^2 - 1$ .

- א. הוכיחו שקיימת סביבה של הנקודה  $(2,1)$ , שבה המשוואה מגדירה פונקציה  $y = f(x)$ .
- ב. חשבו את  $f'(2)$ .
- ג. בדקו האם מתקיימים תנאי מ.פ.ס בנקודה  $(-2,1)$ .
- ד. הוכיחו שהמשוואה מגדירה פונקציה  $y = f(x)$  לכל  $x$  ממשי.

(2) נתונה המשוואה  $x^2 + y + e^y = 17$ .

- א. הוכיחו שקיימת סביבה של הנקודה  $(4,0)$ , שבה המשוואה מגדירה פונקציה  $y = y(x)$ .
- ב. בדקו האם העקום המתאר את המשוואה עולה או יורד בנקודה בה  $x = 4$ .
- ג. הוכיחו ש-מ.פ.ס מתקיים עבור כל נקודה שמקיימת את המשוואה.
- ד. הוכיחו שהמשוואה מגדירה פונקציה  $y = f(x)$  לכל  $x$  ממשי.
- ה. השוו בין תוצאות סעיף ג' ותוצאות סעיף ד'.

(3) נתונה המשוואה  $y^3 - x^3 - 3y^2 + 6x^2 + 3y - 12x + 7 = 0$ .

- א. בדקו האם מתקיימים תנאי משפט הפונקציה הסתומה בנקודה  $(2,1)$ .
- ב. האם המשוואה מגדירה את  $y$  כפונקציה של  $x$  בסביבת הנקודה?
- ג. האם התשובה לסעיף ב' עומדת בסתירה לתשובה בסעיף א'?

(4) לגבי כל אחת מהמשוואות הבאות הגדירו פונקציה  $F(x, y)$  מתאימה,

ובדקו האם קיימת נקודה  $(x_0, y_0)$ , כך שמתקיימים תנאי מ.פ.ס. בדקו בכל מקרה מה ניתן להסיק מהמשפט.

א.  $x^2 + y^2 + 4 = 0$

ב.  $xy - 40x = 100$

ג.  $x^2 - y^2 = 3$

- 5) נתונה המשוואה  $2x^3 + y^3 - 6xy = 0$ .
- מצאו את כל הנקודות עבורן מתקיים משפט הפונקציה הסתומה.
  - חשבו את  $y'$  עבור נקודות אלה.
  - מה תוכלו לומר בשלב זה על הנקודות בהן לא מתקיים מ.פ.ס?
  - השתמשו בתוכנה גרפית לשרטוט המשוואה, וקבעו, על סמך השרטוט, האם בנקודות בהן מ.פ.ס לא מתקיים, קיימת סביבה המכילה את הנקודה ובה  $y$  הוא פונקציה של  $x$ .
- 6) נתונה המשוואה הבאה:  $x^3 + y^3 - 3axy = 0$  ( $a > 0$ ).
- מצאו את כל הנקודות עבורן מתקיים משפט הפונקציה הסתומה.
  - חשבו את  $y''$  עבור נקודות אלה.
- 7) נתונה המשוואה  $x^2 + y^2 = R^2$ .
- מצאו את כל הנקודות עבורן מתקיים משפט הפונקציה הסתומה.
  - בנקודות בהן לא מתקיים משפט הפונקציות הסתומות, קבעו האם קיימת סביבה של הנקודה בה המשואה מתארת פונקציה  $y = f(x)$ . עשו זאת בשתי דרכים:
    - על ידי תיאור גרפי של העקום.
    - על ידי חישוב.
- 8) נתונה המשוואה  $ax^4 + y^4 - xy = 0$ , כאשר  $a$  קבוע ממשי.
- ידוע שהנקודה  $(x_0, 0.5)$  מקיימת את המשוואה, אך לא מקיימת את תנאי משפט הפונקציה הסתומה.
- מצאו את  $x_0$  ואת הקבוע  $a$ .
  - האם קיימות נקודות נוספות, שמקיימות את המשוואה הנתונה אך לא מקיימות את מ.פ.ס? אם כן, מצאו אותן.
  - השתמשו בתוכנה גרפית לשרטוט המשוואה, וקבעו, על סמך השרטוט, האם בנקודות בהן מ.פ.ס לא מתקיים, קיימת סביבה המכילה את הנקודה ובה  $y$  הוא פונקציה של  $x$ .
  - הוכיחו, ללא שימוש בתוכנה גרפית, שעבור הנקודה החיובית שלא מקיימת את מ.פ.ס, לא קיימת סביבה שבה המשוואה מגדירה את  $y$  כפונקציה של  $x$ .

9 נתונה המשוואה  $xy = \ln y - \ln x + 1$ .

- מצאו את כל הנקודות עבורן מתקיים משפט הפונקציה הסתומה.
- חשבו את  $y'$  עבור נקודות אלה.
- מה תוכלו לומר בשלב זה על הנקודות בהן לא מתקיים מ.פ.ס?
- השתמשו בתוכנה גרפית לשרטוט המשוואה, וקבעו, על סמך השרטוט, האם בנקודות בהן מ.פ.ס לא מתקיים, קיימת סביבה המכילה את הנקודה ובה  $y$  הוא פונקציה של  $x$ .
- ללא שימוש בתוכנה גרפית, קבעו האם בנקודות בהן מ.פ.ס לא מתקיים, קיימת סביבה המכילה את הנקודה ובה המשוואה מתארת פונקציה.

10 נתונה המשוואה  $(e-2)\ln x + \ln y = y-1$ .

- בדקו האם מ.פ.ס מתקיים עבור הנקודה  $(e, e)$ .
- כמה נקודות על העקום הנתון מקיימות  $x = e$ ?
- האם התשובה בסעיף ב' עומדת בסתירה לתשובה בסעיף א'?
- מצאו את כל הנקודות המקיימות את מ.פ.ס.
- חשבו את הנגזרת בנקודות הנ"ל.
- השתמשו בתוכנה גרפית על מנת לקבוע, האם בנקודות בהן לא מתקיים המשפט, ניתן למצוא סביבה שבה המשוואה מגדירה פונקציה  $y = f(x)$ .
- חזרו על סעיף ו', רק הפעם תנו הוכחה ללא איור.

11 נתונה המשוואה  $y^3 + 6x \sin y = -8$ , ונתונה נקודה  $(0, -2)$ .

- הוכיחו שהמשוואה מגדירה פונקציה  $y = y(x)$  בסביבת הנקודה.
- פתחו את  $y(x)$  לטור מקלורן מסדר 2.

12 ענו על הסעיפים הבאים:

- נסחו את משפט הפונקציות הסתומות עבור  $x = g(y)$ .
- נתונה המשוואה  $x = \ln(x^2 + y^2)$ .
- הוכיחו כי קיימת סביבה של הנקודה  $(0, 1)$ , שבה המשוואה מגדירה את  $x$  כפונקציה של  $y$ ,  $x = g(y)$ .
- חשבו את  $g'(1)$ .

13 נתונה המשוואה  $xy = \ln y - \ln x + 1$ .

א. הראו כי קיימת סביבה של הנקודה  $(1,1)$ , שבה המשוואה מגדירה את  $x$

כפונקציה של  $y$ ,  $x = g(y)$ .

ב. הוכיחו שהנקודה  $(1,1)$  היא נקודת מקסימום מקומי של  $g(y)$ .

14 בסעיפים א-ב, האם המשוואה  $3x^2y - yz^2 - 4xz = 7$ :

א. מגדירה פונקציה סתומה  $z = z(x, y)$  בסביבת הנקודה  $(-1, 1, 2)$ ?

ב. מגדירה פונקציה סתומה  $y = y(x, z)$  בסביבת הנקודה  $(-1, 1, 2)$ ?

ג. הוכיחו שהפונקציה  $y = y(x, z)$  דיפרנציאבילית בנקודה  $(-1, 2)$ .

15 נתונה המשוואה  $x^3 - y^3 - z^3 - 3x^2y + 3xy^2 + 3z^2 = 3z - 1$ .

בסעיפים א-ב, על סמך מ.פ.ס, האם המשוואה:

א. מגדירה פונקציה סתומה  $z = z(x, y)$  בסביבת הנקודה  $(1, 2, 0)$ ?

ב. מגדירה פונקציה סתומה  $z = z(x, y)$  בסביבת הנקודה  $(4, 4, 1)$ ?

ג. הוכיחו, ללא שימוש במ.פ.ס, שהמשוואה מגדירה פונקציה סתומה

$z = z(x, y)$  בסביבת הנקודה  $(4, 4, 1)$ .

16 נתונה המשוואה  $\sin(x+y) + \sin(y+z) = 1$ .

מצאו נקודה שבסביבה שלה המשוואה מגדירה פונקציה  $y = y(x, z)$ ,

ומצאו את הנגזרות החלקיות של הפונקציה המתאימה.

17 נתונה מערכת המשוואות:

$$1) x = u + v, \quad 2) y = u^2 + v^2, \quad 3) w = u^3 + v^3$$

א. בדקו האם מתקיימים תנאי משפט הפונקציה הסתומה עבור  $w = w(x, y)$ ,

בנקודה  $(x, y, u, v, w) = (1, 1, 0, 1, 1)$ .

במידה שכן, חשבו בנקודה את  $w_x, w_y$ .

ב. חזרו על סעיף א', עבור הנקודה  $(x, y, u, v, w) = (2, 2, 1, 1, 2)$ .

ג. האם קיימת סביבה של הנקודה  $(x, y, u, v, w) = (2, 2, 1, 1, 2)$ , שבה מערכת

המשוואות מגדירה פונקציה  $w = w(x, y)$ ?

במידה שכן, חשבו בנקודה את  $w_x, w_y$ .

ד. מצאו את כל הנקודות במישור, עבורן מתקיים משפט הפונקציה הסתומה

עבור  $w = w(x, y)$ .

**18** נתונה מערכת המשוואות :

$$1) x = a \cos \phi \cos \theta, \quad 2) y = b \sin \phi \cos \theta, \quad 3) z = c \sin \theta \quad (a, b, c > 0)$$

א. בדקו האם מתקיימים תנאי משפט הפונקציה הסתומה עבור  $\phi = \phi(x, y)$ ,

$$\text{בנקודה } P_0, \text{ המתאימה לערכים } \phi_0 = \theta_0 = \frac{\pi}{6}.$$

במידה שכן, חשבו בנקודה את  $\phi_x, \phi_y$ .

בדקו את התשובה על ידי חישוב ישיר.

ב. בדקו האם מתקיימים תנאי משפט הפונקציה הסתומה עבור  $z = z(\phi, x)$ ,

$$\text{בנקודה } P_0, \text{ המתאימה לערכים } \phi_0 = \theta_0 = \frac{\pi}{6}.$$

במידה שכן, חשבו בנקודה את  $z_\phi, z_x$ .

## תשובות סופיות

- (1) א. הוכחה. ב.  $\frac{4}{9}$ . ג. כן. ד. הוכחה.
- (2) א. הוכחה. ב. העקום יורד. ג. הוכחה. ד. הוכחה. ה. תוצאת סעיף ד' טובה יותר.
- (3) א. לא מתקיימים. ב. כן. ג. לא.
- (4) א. לא קיימת. ב. הנקודה (1,140) למשל, מקיימת את תנאי מ.פ.ס. ג. הנקודה (2,1) למשל, מקיימת את תנאי מ.פ.ס.
- (5) א. כל נקודה  $(x, y)$  שעל המשוואה, ואשר שונה מהנקודות (0,0), (2,2).  
 ב.  $y' = -\frac{2x^2 - 2y}{y^2 - 2x}$ . ג. כלום! ד. לא.
- (6) א. כל נקודה על העקום הנתון אשר שונה מהנקודות  $(\sqrt[3]{4a}, \sqrt[3]{2a})$ , (0,0).  
 ב.  $y'' = -\frac{\left[2x - a\left(-\frac{x^2 - ay}{y^2 - ax}\right)\right](y^2 - ax) - \left[2y\left(-\frac{x^2 - ay}{y^2 - ax}\right) - a\right](x^2 - ay)}{(y^2 - ax)^2}$
- (7) א. כל הנקודות על המעגל אשר שונות מהנקודות  $(R, 0)$ ,  $(-R, 0)$ .  
 ב. לא קיימת סביבה כנדרש.
- (8) א.  $x_0 = \frac{1}{2}$ ,  $a = 3$ . ב. כן,  $(-0.5, -0.5)$ , (0,0). ג. לא. ד. שאלת הוכחה.
- (9) א. כל נקודה  $(x, y)$  שעל  $xy = \ln y - \ln x + 1$ , ואשר שונה מהנקודה (1,1).  
 ב.  $y' = -\frac{y + \frac{1}{x}}{x - \frac{1}{y}}$ . ג. כלום! ד. לא קיימת.
- (10) א. כן. ב. שתי נקודות. ג. לא. ד. כל נקודה על העקום אשר שונה מהנקודה (1,1).  
 ה.  $y'(x) = \frac{(2-e)y}{x(1-y)}$  ( $x > 0, y > 0, (x, y) \neq (1,1)$ ). ו. לא ניתן. ז. שאלת הוכחה.
- (11) א. שאלת הוכחה. ב.  $p_2(x) = -2 + \frac{1}{2} \sin 2 \cdot x + \frac{1}{8} \sin 2(\sin 2 - 2 \cos 2)x^2$ .
- (12) א. ראה סרטון. ב. שאלת הוכחה. ג.  $g'(1) = -2$ .
- (13) א. הוכחה. ב. שאלת הוכחה.
- (14) א. לא. ב. כן. ג. שאלת הוכחה.
- (15) א. כן. ב. לא ניתן לדעת. ג. שאלת הוכחה.
- (16) הנקודה היא  $(0, 0, 0.5\pi)$  והנגזרות הן:  $y_x(0, 0, 0.5\pi) = -1$ ,  $y_z(0, 0, 0.5\pi) = 0$ .

ב. לא מתקיימים.

$$(17) \quad \frac{\partial w}{\partial y}(1,1) = \frac{3}{2}, \quad \frac{\partial w}{\partial x}(1,1) = 0 \quad \text{א.}$$

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > \frac{1}{2}x^2 \right\} \quad \text{ד.}$$

$$w_x(2,2) = -3, \quad w_y(2,2) = 3 \quad \text{ג.}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2c}{a}, \quad \frac{\partial z}{\partial \phi} = -c \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{ב.}$$

$$(18) \quad \frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{b}{a\sqrt{3}}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{1}{b} \quad \text{א.}$$

## שימושים גאומטריים

### שאלות

- (1) נתון משטח המוגדר ע"י הפונקציה  $\frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} = 3$  ( $z < 0$ ).  
 מהי משוואת מישור משיק למשטח בנקודה P, בה  $x = -2, y = 1$ ?
- (2) מצאו משוואה של מישור משיק למשטח  $xyz = 8$  בנקודה  $(-2, 2, -2)$ ,  
 וכן משוואה של הישר הפרמטרי הניצב למשטח הנתון בנקודה זו.
- (3) מצאו מישור המשיק למשטח  $x^2 + 8y^2 = 21 - 27z^2$ ,  
 המקביל למישור  $x + 8y + 18z = 0$ .
- (4) למשטח  $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}$  העבירו מישור המשיק בנקודה כלשהי.  
 מישור זה חותך את הצירים  $x, y, z$  בנקודות A, B, C, בהתאמה.  
 נסמן:  $O = (0, 0, 0)$ .  
 הוכיחו  $OA + OB + OC = a$ .  
 (למעשה נוכיח שסכום הקטעים אינו תלוי בנקודת ההשקה)
- (5) נתון המשטח  $x^2yz + 3y^2 = 2xz^2 - 8z$ , ונתונה הנקודה  $(1, 2, -1)$ .  
 הישר הנורמלי למשטח בנקודה הנתונה, חותך את המישור  $x + 3y - 2z = 10$ .  
 בנקודה Q.  
 מצאו את הנקודה Q.
- (6) הראו שהמשטח  $x^2 - 2yz + y^3 = 4$  מאונך לכל אחד מחברי משפחת  
 המשטחים  $x^2 + 1 = (2 - 4a)y^2 + az^2$ , בנקודת החיתוך  $(1, -1, 2)$ .
- (7) מצאו משוואת הישר המשיק לעקום  $C: x = 6\sin t, y = 4\cos 3t, z = 2\sin 5t$   
 בנקודה בה  $t = \frac{1}{4}\pi$ .

(8) ענו על הסעיפים הבאים:

א. נתון עקום  $C: x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ ,

ונתונה נקודה  $P(x_0, y_0, z_0)$ , המתקבלת מהצבת  $t = t_0$  במשוואת העקום. הוכיחו כי משוואת המישור הנורמל לעקום היא

$$x'(t_0) \cdot (x - x_0) + y'(t_0) \cdot (y - y_0) + z'(t_0) \cdot (z - z_0) = 0$$

ב. מצאו את משוואת המישור הנורמל לעקום

$$C: x = 6 \sin t, y = 4 \cos 3t, z = 2 \sin 5t$$

בנקודה בה  $t = 0.25\pi$ .

(9) נתונות שתי עקומות  
 $C_1: x = 2t + 1, y = t^2 - 1, z = t^2 + t$   
 $C_2: x = s^2, y = -s, z = s - 1$

ונתון כי שתי העקומות נמצאות על משטח  $S$ , וכי שתיהן נחתכות בנקודה הנמצאת במישור  $xy$ .

א. מצאו את נקודת החיתוך בין שתי העקומות.

ב. מצאו את משוואת המישור המשיק לשתי העקומות בנקודת החיתוך שבין שתי העקומות.

(10) נתונות שלוש עקומות  
 $C_1: x = 2t + 1, y = t^2 - 1, z = t^2 + t$   
 $C_2: x = s^2, y = -s, z = s - 1$   
 $C_3: x = u + 2, y = u, z = u^2 - 1$

ונתון כי שלוש העקומות נמצאות על משטח  $S$ , וכי שלושתן נחתכות בנקודה הנמצאת במישור  $xy$ .

א. מצאו את נקודת החיתוך בין שתי העקומות.

ב. האם בנקודה הנ"ל ניתן להעביר מישור משיק למשטח  $S$ ? נמקו!

(11) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו שמשוואת הישר המשיק לעקום:  
 $\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$

בנקודה  $P$  שעליו, היא  $\ell: P + t \cdot \nabla F(P) \times \nabla G(P)$

ב. בנקודה  $(1, -1, 1)$ , מצאו את משוואת הישר המשיק לעקום:

$$\begin{cases} 2xz - x^2y = 3 \\ 3x^2y + y^2z = -2 \end{cases}$$

12) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו שמשוואת המישור הנורמלי לעקום

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

בנקודה P שעליו, היא  $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$ ,

כאשר  $(a, b, c) = \overline{\nabla F}(P) \times \overline{\nabla G}(P)$ .

ב. בנקודה  $(1, -1, 1)$ , מצאו את משוואת המישור הנורמלי לעקום:

$$\begin{cases} 2xz - x^2y = 3 \\ 3x^2y + y^2z = -2 \end{cases}$$

13) נתונה הפונקציה  $r: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , על ידי  $x = u \cos v$ ,  $y = u \sin v$ ,  $z = u^2 + v^2$ .

מהן הנקודות שעבורן קיים מישור משיק?

מצאו את משוואת המישור המשיק, בנקודה  $(u, v) = (1, 0)$ .

14) מצאו ביטוי לוקטור היחידה, המאונך למשטח

$$x = \sin u \cos v, \quad y = \sin u \sin v, \quad z = \cos u$$

עבור  $u \in [0, \pi]$ ,  $v \in [0, 2\pi]$ .

באיזה משטח מדובר?

## תשובות סופיות

$$3x - 6y + 2z + 18 = 0 \quad (1)$$

$$x - y + z + 6 = 0, \quad (-2, 2, -2) + t(1, -1, 1) \quad (2)$$

$$x + 8y + 18z = 21, \quad x + 8y + 18z = -21 \quad (3)$$

שאלת הוכחה. (4)

$$Q(7, -9, -15) \quad (5)$$

שאלת הוכחה. (6)

$$\ell: (x, y, z) = (3\sqrt{2}, -2\sqrt{2}, -\sqrt{2}) + s(3\sqrt{2}, -6\sqrt{2}, -5\sqrt{2}) \quad (7)$$

$$3x - 6y - 5z = 26\sqrt{2} \quad \text{ב.} \quad \text{א. שאלת הוכחה.} \quad (8)$$

$$x - 2z = 1 \quad \text{ב.} \quad P(1, -1, 0) \quad \text{א.} \quad (9)$$

(10) א. נקבל שנקודת החיתוך היא  $P(1, -1, 0)$ . ב. לא.

$$(x, y, z) = (1, -1, 1) + t(3, 16, 2) \quad \text{ב.} \quad \text{א. שאלת הוכחה.} \quad (11)$$

$$3x + 16y + 2z = -11 \quad \text{ב.} \quad \text{א. שאלת הוכחה.} \quad (12)$$

$$-2x + z = -1 \quad \text{ב.} \quad (0, 0, 0) \quad \text{א. כל נקודה, למעט} \quad (13)$$

$$(14) \quad \hat{n} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{(x, y, z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad \text{כדור שמרכזו בראשית הצירים, עם רדיוס 1,}$$

$$\text{שנוסחתו: } x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$