מבנים בדידים וקומבינטוריקה

פרק 29 - פונקציות יוצרות

תוכן העניינים

1. פונקציות יוצרות 1

פונקציות יוצרות

שאלות

1) מה המקדם של x^{10} בביטוי $\left(x^2-\frac{1}{2}x+2\right)^{30}$?

2) בנו פונקציה יוצרת למספר האפשרויות של דני לקנות בסופר 50 מוצרי חלב לבית מסוג שוקו, מוקה ובננה. כאשר: משקה בננה מגיע רק באריזות של שלוש, משקה שוקו בזוגות, ומשקה מוקה אפשר לקנות ביחידים, ואחותו של דני אוהבת רק מוקה.
(שימו לב שעליו לחזור הביתה עם משקאות לכל בני המשפחה)

3) איש ציבור מושחת לוקח כל שנה שוחד בסך 2, 4 או 6 מיליון דולר (שלא כמו איש ציבור נורמטיבי, איש ציבור מושחת יכול לקחת שוחד של 6 מיליון דולר מספר שנים ברציפות). סדרת שוחד היא סדרת סכומים שקיבל איש ציבור מושחת במשך כמה שנים, למשל 2, 4, 2, 6, 6.
כמה סדרות שוחד יניבו עבור איש ציבור מושחת סך של 20 מיליון דולר במשך 6 שנים?

4) יהי a_n המקדם של x^n בפיתוח של הפונקציה $\frac{1}{(1-2x)^2}\cdot\frac{1}{(1-x)}$,
ויהי b_n פתרון נוסחת הנסיגה $b_n=b_{n-1}+(n+1)2^n$ עם תנאי ההתחלה $b_0=1$.
הוכיחו כי $a_n=b_n$.
<u>שימו לב</u>: אפשר לפתור את השאלה ע"י חישוב מפורש של a_n ו- b_n, אבל ניתן גם למצוא קיצור דרך משמעותי בעזרת ביטוי מהצורה $\sum_{k=0}^{n}(\ldots)$.

5) יהי a_n מספר הדרכים לכתוב את n כסכום של מספר <u>אי-שלילי</u> של 2-ים, מספר <u>חיובי</u> של 3-ים, ו<u>לכל היותר שני</u> 1-ים, כאשר סדר המחוברים איננו משנה, ויהי b_n מספר הדרכים לפזר n כדורים זהים לשני תאים, כך שבתא הראשון לפחות שלושה כדורים, ובתא השני מספר זוגי של כדורים.
הוכיחו כי $a_n=b_n$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – טל פלדמן ©

6) א. רונית יוצאת לטייל בשכונה בלוויית n חיות מחמד, והיא מזמינה לטיול 3, 4 או 5 חתולים מפח האשפה (זה נקרא חתול פ"ז = פח זבל), מספר כלשהו של זוגות עורבים (עורבים באים בזוגות), וכמו כן, אם התחזית לאזרחים היסטריים לאורך המסלול רגועה, יתכן שרונית תזמין גם תנין מצרי.
נסמן ב- a_n את מספר האפשרויות לבחירת n חיות מחמד לטיול של רונית (חיות מאותו מין ביולוגי נחשבות זהות).

א. חשבו את הפונקציה היוצרת של a_n (תשובה סופית כמנה של פולינומים).

ב. גם נורית יוצאת לטיול עם n חיות מחמד משלה. מספר האפשרויות של נורית לבחור את החיות שלה הוא b_n, ונתון כי $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \frac{x+x^2}{(1-x)^4}$.
בכמה אופנים יכולה נורית לבחור לעצמה 23 חיות מחמד לטיול פסטורלי?

7) חשבו את a_{22} בסדרה הנוצרת על ידי $F(x) = \frac{6-10x}{1-7x+12x^2}$

8) בנו פונקציה יוצרת (ללא $\sum$) עבור מספר הדרכים לפזר n כדורים זהים ב-7 תאים, כך שמספרי הכדורים בתא הראשון ובתא השביעי שווים, בתא השני והשישי יש מספר שווה של כדורים, ובתא הרביעי מספר גדול מאשר בתא הראשון והשני יחד.

9) מצאו נוסחה סגורה לסכום $\sum_{k=0}^{n} k \cdot 5^k$.

10) נסמן ב- a_n את מספר הדרכים לפזר n כדורים זהים ב-5 תאים, כך שלכל $1 \le k \le 5$ מספר הכדורים בתא ה- k שווה למספר הכדורים בתא ה- $5-k+1$, ומספר הכדורים בתא האמצעי גדול מסכום מספרי הכדורים בתא הראשון והשני יחד.
מצאו ביטוי אלגברי סגור (ללא $\sum$) לפונקציה היוצרת $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

11) ברשותך שלושה כדורים לבנים זהים, שלושה כדורים שחורים זהים, ומאגר בלתי מוגבל של כדורים אדומים וירוקים זהים.
בכמה אופנים ניתן להרכיב מהם קבוצה (סדר הכדורים לא משנה) בת n כדורים?
פתרו בעזרת פונקציות יוצרות ובעזרת הכלה והדחה והשוו את התוצאות.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – טל פלדמן ©

12) א. בכמה מספרים קטנים ממיליון סכום הספרות הוא 23 בדיוק?
(שאלה זו מופיעה גם בפרק על הכלה הדחה)
ב. בכמה מספרים קטנים ממיליון סכום הספרות הוא 31 בדיוק?
ג. בכמה מספרים קטנים ממיליון סכום הספרות הוא 23 לכל היותר?

13) הוכיחו כי מספר הפתרונות בשלמים אי-שליליים למשוואה $x+y+z=n$, כאשר y זוגי, $3\le x\le 5$ ו-$0\le z\le 1$, שווה למספר הפתרונות בשלמים אי-שליליים למשוואה $x+y=n$, כאשר $3\le x$ ו-$0\le y\le 2$.

14) נתונות סדרות $(a_n)_{n\ge 0},(b_n)_{n\ge 0}$ כלשהן, ונתון שאברי הסדרה $(c_n)_{n\ge 0}$ מקיימים $c_n=\sum_{i=0}^{n}a_ib_{n-i}$ לכל $n\ge 0$. נסמן ב-$(dc)_n,(db)_n,(da)_n$ את סדרות ההפרשים של הסדרות $(c_n)_{n\ge 0},(b_n)_{n\ge 0},(a_n)_{n\ge 0}$, בהתאמה.
הוכיחו **באמצעות פונקציות יוצרות** כי לכל $n\ge 0$ מתקיים:

$$(dc)_n=\sum_{i=0}^{n}(da)_i\,b_{n-i}=\sum_{i=0}^{n}a_i\,(db)_{n-i}.$$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

כתב ופתר – טל פלדמן ©