

רענון במתמטיקה מספר 500-5-0010

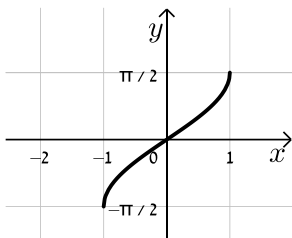
פרק 16 - פונקציות טריגונומטריות הפוכות

תוכן העניינים

1. הגדרת הפונקציות הטריגונומטריות ההפוכות 1

הגדרת הפונקציות הטריונומטריות ההפוכות:

סיכום כללי:

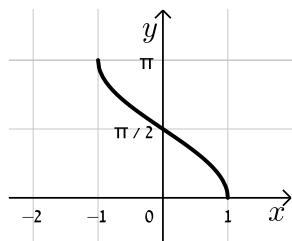


תיאור גרפי של הפונקציה: $f(x) = \arcsin(x)$

סימון נוסף: $f(x) = \sin^{-1}(x)$

תחום הגדרה: $-1 \leq x \leq 1$

טווח: $-\frac{\pi}{2} \leq f(x) \leq \frac{\pi}{2}$

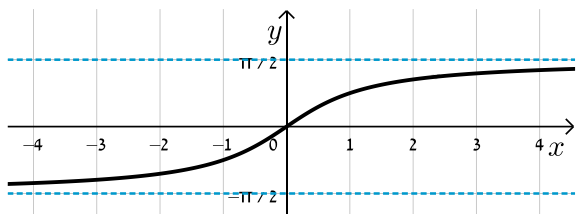


תיאור גרפי של הפונקציה: $f(x) = \arccos(x)$

סימון נוסף: $f(x) = \cos^{-1}(x)$

תחום הגדרה: $-1 \leq x \leq 1$

טווח: $0 \leq f(x) \leq \pi$

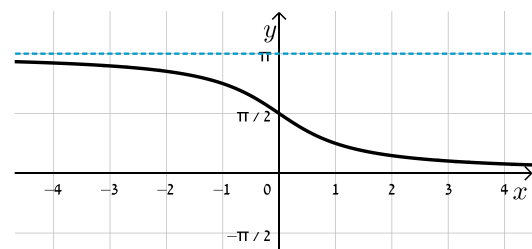


תיאור גרפי של הפונקציה: $f(x) = \arctan(x)$

סימון נוסף: $f(x) = \tan^{-1}(x)$

תחום הגדרה: $-\infty < x < \infty$

טווח: $-\frac{\pi}{2} < f(x) < \frac{\pi}{2}$



תיאור גרפי של הפונקציה: $f(x) = \operatorname{arccot}(x)$

סימון נוסף: $f(x) = \cot^{-1}(x)$

תחום הגדרה: $-\infty < x < \infty$

טווח: $0 < f(x) < \pi$

קשרים בין הפונקציות הטריגונומטריות להפוכות:

עבור הפונקציות הטריגונומטריות, שאינן חח"ע, נקבל את הקשרים הבאים:

הפונקציה	הזהות
סינוס	$\sin(\sin^{-1}(x)) = x \quad -1 \leq x \leq 1$
	$\sin^{-1}(\sin(x)) = \begin{cases} x - 2\pi k & -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi k \\ \pi(k+1) - x & \frac{\pi}{2} + 2\pi k \leq x \leq \frac{3\pi}{2} + 2\pi k \end{cases}$
קוסינוס	$\cos(\cos^{-1}(x)) = x \quad -1 \leq x \leq 1$
	$\cos^{-1}(\cos(x)) = \begin{cases} x - 2\pi k & 2\pi k \leq x \leq \pi(1+2k) \\ 2\pi k - x & \pi(1+2k) \leq x \leq 2\pi(k+1) \end{cases}$
טנגנס	$\tan(\tan^{-1}(x)) = x \quad -\infty < x < \infty$
	$\tan^{-1}(\tan(x)) = x - \pi k \quad -\frac{\pi}{2} + \pi k < x < \frac{\pi}{2} + \pi k$
קוטנגנס	$\cot(\cot^{-1}(x)) = x \quad -\infty < x < \infty$
	$\cot^{-1}(\cot(x)) = x - \pi k \quad \pi k < x < \pi + \pi k$

שאלות:

(1) חשב ללא מחשבון:

א. $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	ב. $\arccos(-1)$
ג. $\operatorname{arccot}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$	ד. $\arctan(-\sqrt{3})$
ה. $\arccos\left(\frac{\pi}{3}\right)$	ו. $\arcsin(-0.5)$

(2) חשב ללא מחשבון:

א. $\arcsin\left(\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$	ב. $\sin(\arcsin(-0.5))$
ג. $\sin\left(\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$	ד. $\cos(\operatorname{arccot}(1))$
ה. $\sin\left(2 \arctan(\sqrt{3})\right)$	ו. $\tan(-\operatorname{arccot}(\sqrt{3}))$

(3) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות :

ב. $y = \arccos \frac{x+3}{2x+1}$

א. $y = \arcsin \frac{2x+1}{3-3x}$

ג. $y = \arctan \frac{1}{1-\ln x}$

(4) הוכח כי לכל x מתחום ההגדרה מתקיים :

א. $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$

ב. $\sin(2 \arccos x) = 2x\sqrt{1-x^2}$

ג. $\arctan x + \arctan y = \arctan \frac{x+y}{1-xy}$

ד. $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \frac{x}{|x|}$, $x \neq 0$

(5) הראה את הקשר הבא: $\arctan 1 + \arctan 2 + \arctan 3 = \pi$

תשובות סופיות:

(1) א. $-\frac{\pi}{4}$ ב. π ג. $\frac{\pi}{3}$ ד. $-\frac{\pi}{3}$ ה. ϕ ו. $-\frac{\pi}{6}$

(2) א. $-\frac{\pi}{6}$ ב. $-\frac{1}{2}$ ג. $\frac{1}{2}$ ד. 1 ה. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ו. $-\frac{1}{\sqrt{3}}$

(3) א. $x \leq \frac{2}{5}$, $x \geq 4$ ב. $x \leq -\frac{4}{3}$, $x \geq 2$ ג. $x > 0$, $x \neq e$

(4) שאלות הוכחה.

(5) הוכחה.