חדוא מואץ

פרק 29 - פונקציות הומוגניות-משפט אוילר

תוכן העניינים

פונקציות הומוגניות

שאלות

בשאלות **3-1** בדקו האם הפונקציה הומוגנית ומאיזה סדר:

1) $f(x,y)=x^3\sqrt{y}+y^3\sqrt{x}$

2) $h(x,y)=\dfrac{\ln\left(e^{5x}\right)}{\sqrt[3]{ex^6-7y^6}}$

3) $f(x,y)=\ln\left(4^x\right)\cdot g\left[\dfrac{\sqrt{xy}}{x+7y}\right]$

4) נתון כי $z(x,y)$ פונקציה הומוגנית מסדר 3.
בדקו האם הפונקציה $f(x,y)=\dfrac{x}{y^4}+\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x^5}}+\dfrac{1}{z(x,y)}-4$ הומוגנית.
במידה ואינה הומוגנית, השמיטו ממנה חלק, כך שתתקבל פונקציה הומוגנית.
מהו סדר ההומוגניות של הפונקציה במקרה זה?

5) מצאו עבור איזה ערך של הפרמטר α, כל אחת מהפונקציות הבאות הומוגניות.
כמו כן, מצאו את סדר ההומוגניות עבור ה- α שנמצאה.

א. $f(x,y)=\dfrac{x^4y+xy^\alpha}{4x+10y}$

ב. $f(x,y)=\sqrt{\dfrac{y}{x}}(\ln\alpha x-\ln y)$

6) בתרגיל זה נדגים את התכונה הבאה של פונקציות הומוגניות:
אם פונקציה היא הומוגנית מסדר n, אז אם נחלק אותה ב- x^n,
נקבל פונקציה של $\frac{y}{x}$.

א. הדגימו את הטענה על הפונקציות הבאות:
1. $f(x,y)=x^2-xy+2y^2$
2. $f(x,y)=\sqrt{x+y}$

ב. הוכיחו את הטענה לעיל.

הערה
ניסוח פורמלי של הטענה לעיל הוא:
אם פונקציה היא הומוגנית מסדר n, אז קיימת פונקציה $g(t)$, כך ש- $t=\frac{y}{x}$,
המקיימת $\frac{f(x,y)}{x^n}=g(t)$.

7) תהיינה f ו- g פונקציות ב- n משתנים, והומוגניות מסדר r_1 ו- r_2, בהתאמה.
קבעו, לכל אחת מהפונקציות הבאות, אם היא הומוגנית ומאיזה דרגה:

א. $f\cdot g$ ב. $\frac{f}{g}$ ג. $\frac{(f)^2}{\sqrt[n]{g}}$ ד. $f+g$

8) נתון כי f פונקציה הומוגנית מסדר 4.
ידוע כי $f(1,2)=4\ ,\ \ f_x(1,2)=10$.
חשבו את $f(2,4),\ f(0.5,1),\ f_x(2,4),\ f_x(1.5,3)$.

9) נתונה פונקציה $f(x,y)=x^4+y^2z(x,y)$.
ידוע כי z פונקציה הומוגנית מסדר 2 וכי $f(4,10)=1$.

א. חשוב את $f(2,5)$.

ב. ידוע כי $f_x(1,1)=4$.
חשבו את $f_x(a,a)$, לכל קבוע a.

תשובות סופיות

1) הומוגנית מסדר 3.5.
2) הומוגנית מסדר -1.
3) הומוגנית מסדר 1.
4) הפונקציה לא הומוגנית. על ידי השמטת חלקים מהפונקציה אפשר לקבל:
$f(x,y)=\frac{x}{y^4}+\frac{1}{z(x,y)}$ הומוגנית מסדר -3.
$f(x,y)=\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x^5}}$ הומוגנית מסדר -2.
$f(x,y)=-4$ הומוגנית מסדר 0.
5) א. עבור $\alpha=4$ הפונקציה הומוגנית מסדר 4. ב. הומוגנית מסדר 0 לכל $\alpha>0$.
6) א. 1. $g(t)=1-t+2t^2$ .2 $g(t)=\sqrt{1+t}$ ב. הוכחה.
7) א. הומוגנית מדרגה r_1+r_2. ב. הומוגנית מדרגה r_1-r_2.
ג. הומוגנית מדרגה $2r_1-\frac{r_2}{n}$.
ד. הומוגנית מדרגה r_1 רק אם $r_1=r_2$. אחרת לא הומוגנית.
8) $f(0.5,1)=\frac{1}{4}$, $f(2,4)=64$, $f_x(1.5,3)=33.75$, $f_x(2,4)=80$
9) א. $f(2,5)=\frac{1}{16}$ ב. $f_x(a,a)=4a^3$

משפט אוילר

שאלות

1) נתונה הפונקציה $f(x,y)=x^2-xy+2y^2$.

א. הוכיחו שהפונקציה הומוגנית ומצאו את דרגתה.

ב. הראו שמשפט אוילר מתקיים.

2) ענו על הסעיפים הבאים:

א. נניח ש- $f=f(x,y)$ הומוגנית מסדר 0.

הוכיחו כי $\frac{f_x}{f_y}=-\frac{y}{x}$.

ב. נתון כי $f(x,y)=\frac{e^{\frac{x}{y}}(x+y)}{(x-y)(\ln x-\ln y)}$.

הוכיחו כי $x\cdot f_x=-y\cdot f_y$.

3) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו כי פונקציית התועלת $u(x,y)=\left(\frac{1}{2}x^m+\frac{1}{2}y^m\right)^{1/m}$ הומוגנית.

הניחו כי m קבוע חיובי.

ב. הוכיחו, ללא חישוב ישיר של הנגזרות, כי $u_y(a,a)=u_y(1,1)$.

ג. הוכיחו, ללא חישוב ישיר של הנגזרות, כי $u_x(2,2)+u_y(1,1)=1$.

4) תהי f פונקציה הומוגנית מסדר 2.

נגדיר $h(x,y)=x^2-y^2+f\left(\frac{x^2}{y},\frac{y^2}{x}\right)$.

א. הוכיחו כי h הומוגנית מסדר 2.

ב. נתון $h_x'(6,3)=9$, $f(8,1)=16$.

מצאו את $h(2,1)$ ואת $h_y'(2,1)$.

5) h ו- g הינן פונקציות הומוגניות מסדר 2 ו-10, בהתאמה. נגדיר:

$$f(x,y)=(x+y)h(x,y)+\frac{\sqrt{g(x,y)}}{x^2+y^2}$$

א. הוכיחו כי f הומוגנית מסדר 3.

ב. נתון: $h(4,32)=16$, $f_y'(1,8)=3$, $f_x'(2,16)=12$.

מצאו את: $f(1,8)$ ואת $g(1,8)$.

6) f הומוגנית מסדר 4, g הומוגנית מסדר 2 ו- h הומוגנית מסדר 0.

מגדירים את הפונקציה: $p(x,y)=f(x,y)+g(x,y)-h(x,y)$.

נתון: $p(1,2)=\frac{7}{2}$, $h\left(\frac{1}{2},1\right)=\frac{5}{2}$, $f_y'(-1,-2)=-4$, $f_x'(2,4)=64$.

חשבו את $g\left(\frac{1}{2},1\right)$.

7) הפונקציה $f(x,y)$ הומוגנית מסדר 3, והנתונים בשרטוט.

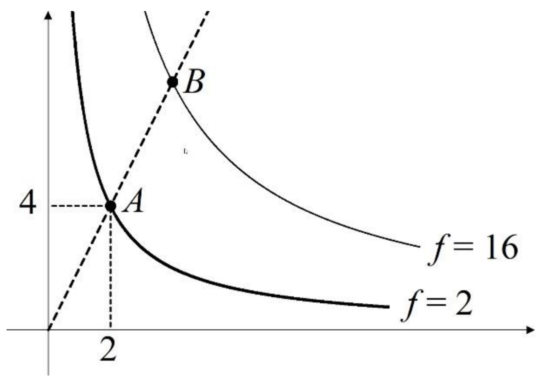
א. מצאו את שיעורי הנקודה B.

ב. מצאו את ערך הסכום $f_x(4,8)+2f_y(4,8)$.

ג. נגדיר פונקציה חדשה $u(x,y)$, על ידי $u(x,y)=\left(f(x,y)\right)^2$.

1. לפי כללי הגזירה, מתקיים $u_x(x,y)=2\cdot f(x,y)\cdot f_x(x,y)$.
הסבירו זאת בקצרה.

2. הוכיחו כי $x\cdot u_x(x,y)+y\cdot u_y(x,y)=6\left(f(x,y)\right)^2$.
היעזרו בתת-הסעיף הקודם ובנתונים על f.



8) תהי $f(x,y)$ פונקציה הומוגנית מסדר m,
המקיימת $f(6,3)=243$ ו- $f(2,1)=27$.

א. מצאו את סדר ההומוגניות m.

ב. בנקודה $(2,1)$ עוברת עש"ע של f.
העבירו משיק לעש"ע בנקודה הנ"ל.
המשיק הוא $2x+3y=7$.
מצאו את $f_x(1,0.5)$, $f_y(2,1)$, $f_x(2,1)$.

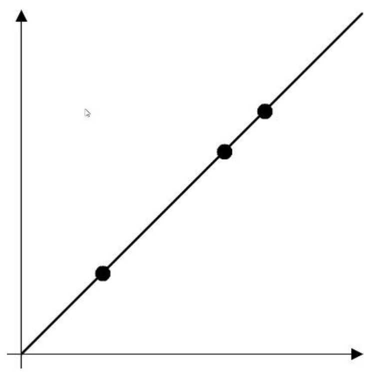
9) תהי $g(t)$ פונקציה של משתנה אחד.
על הפונקציה g ידוע, כי $g'(8)=2$, $g(1)=3$, $g(4)=5$.
המשתנה t תלוי במשתנים החיוביים (x,y), כך: $t=\frac{4y}{x}$.
נגדיר תועלת u כפונקציה של המשתנים (x,y), באופן הבא:
$u(x,y)=g(t)=g\left(\frac{4y}{x}\right)$.

א. באיור שלהלן קרן עם שיפוע 1.
מה הערך של התועלת בנקודות המסומנות על הקרן?

ב. הוכיחו כי הקרן $4y-x=0$ היא עקומת אדישות של התועלת.
ציירו את הקרן הזאת ורשמו באיור מה הערך של התועלת.

ג. הוכיחו כי התועלת היא פונקציה הומוגנית. מהו סדר ההומוגניות?

ד. הוכיחו כי $u_x(1,2)=-16$.



10) נניח ש- $f=f(x,y)$ הומוגנית מסדר 1.
הוכיחו כי $x^2 f_{xx}+2xyf_{xy}+y^2 f_{yy}=0$.

(11 מפעל מייצר x חולצות ו- y מכנסיים.
הרווח השולי, המתקבל מייצור כל אחד מהמוצרים, נתון על ידי:
$f_x(x,y)=4x+8y, \quad f_y(x,y)=8x+20y$ ₪ ליחידה.
מצאו את פונקציית הרווח של המפעל, אם ידוע שפונקציה זו הומוגנית.

(12 לחברת 'מזון בריא' יש 300 מכונות:
x מכונות לייצור שוקולד ו- y מכונות לייצור גלידה.
ידוע כי התפוקה השולית, המתקבלת מייצור כל אחד מהמוצרים,
נתונה על ידי $f_x(x,y)=6x^{-\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}, \quad f_y(x,y)=3x^{\frac{2}{3}}y^{-\frac{2}{3}}$.

א. מצאו את פונקציית הייצור, אם ידוע שהיא הומוגנית.
ב. מצאו כמה מכונות מכל סוג על המפעל להחזיק, כדי לקבל את התפוקה הכוללת המקסימלית.

הערה: סעיף ב אינו קשור להומוגניות ועוסק בנושא "בעיות קיצון תחת אילוץ".

(13 בחברת 'שוקולד פנדה' בדקו ומצאו, כי התפוקה השולית, המתקבלת משימוש ב- x טון סוכר ו- y טון קקאו, נתונה על ידי $f_x(x,y)=3x^2y^2, \quad f_y(x,y)=2x^3y$.
מחירי המוצרים הם 6,000 ₪ לטון סוכר ו- 4,000 ₪ לטון קקאו,
והתקציב לקניית המוצרים הוא 100,000 ₪.

א. מצאו את פונקציית הייצור, אם ידוע שהיא הומוגנית.
ב. מצאו את כמות הסוכר והקקאו בהם מתקבלת תפוקה מקסימלית.
מהי התפוקה במקרה זה?
ג. כיצד תשתנה התשובה, אם מחירי הסוכר והקקאו יהיו שניהם 5,000 ₪ לטון?

הערה: סעיפים ב-ג אינם קשורים להומוגניות ועוסקים בנושא "בעיות קיצון תחת אילוץ".

(14 הוכיחו או הפריכו:

א. אם $f_x(x,y)$ הומוגנית מסדר 4, אז $f(x,y)$ הומוגנית מסדר 5.
ב. אם פונקציה $f(x,y)$ מקיימת $f(2,4)=2^3 f(1,2)$,
אז הפונקציה הומוגנית מסדר 3.

תשובות סופיות

1) שאלת הוכחה.

2) שאלת הוכחה.

3) שאלת הוכחה.

4) א. שאלת הוכחה. ב. $h(2,1)=4$ $h_y'(2,1)=8$

5) א. שאלת הוכחה. ב. $g(1,8)=0$ $f(1,8)=9,$

6) $-\frac{3}{4}$

7) א. $\mathrm{B}(4,8)$ ב. 12 ג. הוכחה והסבר.

8) א. 2 ב. $f_x(1,0.5)=\frac{54}{7}$, $f_y(2,1)=\frac{3\left(\frac{108}{7}\right)}{2}$, $f_x(2,1)=\frac{108}{7}$,

9) א. 5 ב-ד. שאלת הוכחה.

10) שאלת הוכחה.

11) $f(x,y)=2x^2+8xy+10y^2$

12) א. $f(x,y)=9x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}$ ב. על המפעל להחזיק 200 מכונות לייצור שוקולד ו-100 מכונות לייצור גלידה, כדי לקבל תפוקה מקסימלית.

13) א. $f(x,y)=x^3y^2$
ב. אם המפעל ישתמש ב-10 טון סוכר ו-10 טון קקאו, הוא יקבל תפוקה מקסימלית השווה ל- $f(10,10)=10^3 10^2=100000$ חפיסות שוקולד.
ג. התשובה לא תשתנה.

14) א. הטענה אינה נכונה. ב. הטענה אינה נכונה.