

חשבון אינפיניטימלי 2

פרק 33 - פונקציות גמא ובטא (פונקציות אוילר)

תוכן העניינים

1. פונקציית גמא.....1
2. פונקציית בטא.....3

פונקציית גמא

שאלות

(1) הוכיחו:

א. $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$, לכל $n \in \mathbb{N}$.

ב. $\Gamma(n+1) = n!$, לכל $n \in \mathbb{N}$.

(2) חשבו, ללא מחשבון, כל אחד מהסעיפים הבאים:

א. $\frac{82\Gamma(41)}{\Gamma(43)}$

ב. $\frac{\Gamma(2.5)}{4\Gamma(0.5)}$

ג. $\frac{\Gamma(2.25)}{\Gamma(4.25)}$

ד. $\frac{\Gamma(-2.5)}{\Gamma(0.5)}$

(3) הוכיחו כי $\Gamma(0.5) = \sqrt{\pi}$.

(4) חשבו את האינטגרלים הבאים:

א. $\int_0^{\infty} x^3 e^{-x} dx$

ב. $\int_0^{\infty} x^5 e^{-2x} dx$

(5) חשבו את האינטגרלים הבאים:

א. $\int_0^{\infty} \sqrt{x} e^{-x^3} dx$

ב. $\int_0^{\infty} x^2 e^{-ax^2} dx$

(6) חשבו את האינטגרלים הבאים :

א. $\int_0^{\infty} 4^{-10x^2} dx$

ב. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{-\ln x}} dx$

(7) הוכיחו כי $\int_0^1 x^m (\ln x)^n dx = \frac{(-1)^n n!}{(m+1)^{n+1}}$ כאשר $n \in \mathbb{N}$ ו- $-1 < m \in \mathbb{R}$.

(8) הוכיחו כי $\Gamma(0)$ אינו מוגדר.

תשובות סופיות

(1) שאלות הוכחה.

(2) א. $\frac{1}{21}$ ב. $\frac{3}{16}$ ג. $\frac{16}{107}$ ד. $-\frac{8}{15}$

(3) שאלת הוכחה.

(4) א. 6 ב. $\frac{5!}{2^6}$

(5) א. $\frac{1}{3}\sqrt{\pi}$ ב. $\frac{\sqrt{\pi}}{4a^{1.5}}$

(6) א. $\sqrt{\frac{\pi}{40 \ln 4}}$ ב. $\sqrt{\pi}$

(7) שאלת הוכחה.

(8) שאלת הוכחה.

פונקציית בטא

שאלות

(1) הוכיחו:

א. $B(m, n) = B(n, m)$

ב. $\int_0^{\pi/2} (\sin x)^{2m-1} (\cos x)^{2n-1} dx = \frac{1}{2} B(m, n)$

(2) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו כי $B(m, n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$, כאשר $m, n > 0$.

ב. הוכיחו כי $\int_0^{\pi/2} \sin^{2m-1} x \cos^{2n-1} x dx = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{2\Gamma(m+n)}$, כאשר $m, n > 0$.

(3) חשבו את האינטגרלים הבאים:

א. $\int_0^1 x^4 (1-x)^3 dx$

ב. $\int_0^2 \frac{x^2 dx}{\sqrt{2-x}}$

ג. $\int_0^a y^4 \sqrt{a^2 - y^2} dy$

(4) חשבו את האינטגרלים הבאים:

א. $\int_0^{\pi/2} \sin^6 x dx$

ב. $\int_0^{\pi/2} \sin^4 x \cos^5 x dx$

ג. $\int_0^{\pi} \cos^4 x dx$

(5) הוכיחו כי $\int_0^{\pi/2} \sin^p x dx = \int_0^{\pi/2} \cos^p x dx$ שווה ל-

א. $\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (p-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot p} \cdot \frac{\pi}{2}$, אם p שלם חיובי זוגי.

ב. $\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (p-1)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot p}$, אם $p > 1$ שלם חיובי אי-זוגי.

6) חשבו את האינטגרלים הבאים :

א. $\int_0^{\pi/2} \cos^6 x dx$

ב. $\int_0^{\pi/2} \sin^3 x \cos^2 x dx$

ג. $\int_0^{2\pi} \sin^8 x dx$

7) נתון $\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin p\pi}$

א. הוכיחו כי $\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}$, כאשר $0 < p < 1$.

ב. חשבו $\int_0^\infty \frac{dy}{1+y^4}$

8) חשבו $\int_0^2 x \sqrt[3]{8-x^3} dx$

9) הוכיחו כי $\int_0^1 \sqrt{1-x^4} dx = \frac{(\Gamma(1/4))^2}{6\sqrt{2}\pi}$

תשובות סופיות

1) שאלת הוכחה.

2) שאלת הוכחה.

3) א. $\frac{1}{280}$ ב. $\frac{64\sqrt{2}}{15}$ ג. $\frac{\pi a^6}{32}$

4) א. $\frac{5\pi}{32}$ ב. $\frac{8}{315}$ ג. $\frac{3\pi}{8}$

5) שאלות הוכחה.

6) א. $\frac{5\pi}{32}$ ב. $\frac{2}{15}$ ג. $\frac{35\pi}{64}$

7) א. שאלת הוכחה. ב. $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$

8) $\frac{16\pi}{9\sqrt{3}}$

9) שאלת הוכחה.