

## חשבון אינפיניטימלי 2

פרק 33 - פונקציות גמא ובטא (פונקציות אוילר)

תוכן העניינים

1. פונקציית גמא..... 1
2. פונקציית בטא..... 3

## פונקציית גמא

### שאלות

(1) הוכיחו:

א.  $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$ , לכל  $n \in \mathbb{N}$ .

ב.  $\Gamma(n+1) = n!$ , לכל  $n \in \mathbb{N}$ .

(2) חשבו, ללא מחשבון, כל אחד מהסעיפים הבאים:

א.  $\frac{82\Gamma(41)}{\Gamma(43)}$

ב.  $\frac{\Gamma(2.5)}{4\Gamma(0.5)}$

ג.  $\frac{\Gamma(2.25)}{\Gamma(4.25)}$

ד.  $\frac{\Gamma(-2.5)}{\Gamma(0.5)}$

(3) הוכיחו כי  $\Gamma(0.5) = \sqrt{\pi}$ .

(4) חשבו את האינטגרלים הבאים:

א.  $\int_0^{\infty} x^3 e^{-x} dx$

ב.  $\int_0^{\infty} x^5 e^{-2x} dx$

(5) חשבו את האינטגרלים הבאים:

א.  $\int_0^{\infty} \sqrt{x} e^{-x^3} dx$

ב.  $\int_0^{\infty} x^2 e^{-ax^2} dx$

6) חשבו את האינטגרלים הבאים :

א.  $\int_0^{\infty} 4^{-10x^2} dx$

ב.  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{-\ln x}} dx$

7) הוכיחו כי  $\int_0^1 x^m (\ln x)^n dx = \frac{(-1)^n n!}{(m+1)^{n+1}}$  כאשר  $n \in \mathbb{N}$  ו-  $-1 < m \in \mathbb{R}$ .

8) הוכיחו כי  $\Gamma(0)$  אינו מוגדר.

### תשובות סופיות

1) שאלות הוכחה.

2) א.  $\frac{1}{21}$  ב.  $\frac{3}{16}$  ג.  $\frac{16}{107}$  ד.  $-\frac{8}{15}$

3) שאלת הוכחה.

4) א. 6 ב.  $\frac{5!}{2^6}$

5) א.  $\frac{1}{3}\sqrt{\pi}$  ב.  $\frac{\sqrt{\pi}}{4a^{1.5}}$

6) א.  $\sqrt{\frac{\pi}{40 \ln 4}}$  ב.  $\sqrt{\pi}$

7) שאלת הוכחה.

8) שאלת הוכחה.

## פונקציית בטא

### שאלות

(1) הוכיחו:

א.  $B(m, n) = B(n, m)$

ב.  $\int_0^{\pi/2} (\sin x)^{2m-1} (\cos x)^{2n-1} dx = \frac{1}{2} B(m, n)$

(2) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו כי  $B(m, n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$ , כאשר  $m, n > 0$ .

ב. הוכיחו כי  $\int_0^{\pi/2} \sin^{2m-1} x \cos^{2n-1} x dx = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{2\Gamma(m+n)}$ , כאשר  $m, n > 0$ .

(3) חשבו את האינטגרלים הבאים:

א.  $\int_0^1 x^4 (1-x)^3 dx$

ב.  $\int_0^2 \frac{x^2 dx}{\sqrt{2-x}}$

ג.  $\int_0^a y^4 \sqrt{a^2 - y^2} dy$

(4) חשבו את האינטגרלים הבאים:

א.  $\int_0^{\pi/2} \sin^6 x dx$

ב.  $\int_0^{\pi/2} \sin^4 x \cos^5 x dx$

ג.  $\int_0^{\pi} \cos^4 x dx$

(5) הוכיחו כי  $\int_0^{\pi/2} \sin^p x dx = \int_0^{\pi/2} \cos^p x dx$  שווה ל-

א.  $\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (p-1) \pi}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot p}$ , אם  $p$  שלם חיובי זוגי.

ב.  $\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (p-1)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot p}$ , אם  $p > 1$  שלם חיובי אי-זוגי.

6) חשבו את האינטגרלים הבאים :

א.  $\int_0^{\pi/2} \cos^6 x dx$

ב.  $\int_0^{\pi/2} \sin^3 x \cos^2 x dx$

ג.  $\int_0^{2\pi} \sin^8 x dx$

7) נתון  $\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin p\pi}$

א. הוכיחו כי  $\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}$ , כאשר  $0 < p < 1$ .

ב. חשבו  $\int_0^\infty \frac{dy}{1+y^4}$

8) חשבו  $\int_0^2 x^3 \sqrt{8-x^3} dx$

9) הוכיחו כי  $\int_0^1 \sqrt{1-x^4} dx = \frac{(\Gamma(1/4))^2}{6\sqrt{2}\pi}$

### תשובות סופיות

1) שאלת הוכחה.

2) שאלת הוכחה.

3) א.  $\frac{1}{280}$  ב.  $\frac{64\sqrt{2}}{15}$  ג.  $\frac{\pi a^6}{32}$

4) א.  $\frac{5\pi}{32}$  ב.  $\frac{8}{315}$  ג.  $\frac{3\pi}{8}$

5) שאלות הוכחה.

6) א.  $\frac{5\pi}{32}$  ב.  $\frac{2}{15}$  ג.  $\frac{35\pi}{64}$

7) א. שאלת הוכחה. ב.  $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$

8)  $\frac{16\pi}{9\sqrt{3}}$

9) שאלת הוכחה.