חשבון אינפיניטיסימלי 2

פרק 33 - פונקציות גמא ובטא (פונקציות אוילר)

תוכן העניינים

1. פונקציית גמא 1
2. פונקציית בטא 3

פונקציית גמא

שאלות

1) הוכיחו:

א. $\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)$, לכל $n\in\mathbb{N}$.

ב. $\Gamma(n+1)=n!$, לכל $n\in\mathbb{N}$.

2) חשבו, ללא מחשבון, כל אחד מהסעיפים הבאים:

א. $\dfrac{82\Gamma(41)}{\Gamma(43)}$

ב. $\dfrac{\Gamma(2.5)}{4\Gamma(0.5)}$

ג. $\dfrac{\Gamma(2.25)}{\Gamma(4.25)}$

ד. $\dfrac{\Gamma(-2.5)}{\Gamma(0.5)}$

3) הוכיחו כי $\Gamma(0.5)=\sqrt{\pi}$.

4) חשבו את האינטגרלים הבאים:

א. $\int_0^\infty x^3e^{-x}dx$

ב. $\int_0^\infty x^5e^{-2x}dx$

5) חשבו את האינטגרלים הבאים:

א. $\int_0^\infty \sqrt{x}e^{-x^3}dx$

ב. $\int_0^\infty x^2e^{-ax^2}dx$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

6) חשבו את האינטגרלים הבאים:

א. $\int_0^{\infty} 4^{-10x^2}\,dx$

ב. $\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{-\ln x}}\,dx$

7) הוכיחו כי $\int_0^1 x^m(\ln x)^n\,dx = \frac{(-1)^n n!}{(m+1)^{n+1}}$, כאשר $n\in\mathbb{N}$ ו- $-1<m\in\mathbb{R}$.

8) הוכיחו כי $\Gamma(0)$ אינו מוגדר.

תשובות סופיות

1) שאלות הוכחה.

2) א. $\frac{1}{21}$ ב. $\frac{3}{16}$ ג. $\frac{16}{107}$ ד. $-\frac{8}{15}$

3) שאלת הוכחה.

4) א. 6 ב. $\frac{5!}{2^6}$

5) א. $\frac{1}{3}\sqrt{\pi}$ ב. $\frac{\sqrt{\pi}}{4a^{1.5}}$

6) א. $\sqrt{\frac{\pi}{40\ln 4}}$ ב. $\sqrt{\pi}$

7) שאלת הוכחה.

8) שאלת הוכחה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

פונקציית בטא

שאלות

1) הוכיחו:

א. $B(m,n)=B(n,m)$

ב. $\int_0^{\pi/2}(\sin x)^{2m-1}(\cos x)^{2n-1}dx=\frac{1}{2}B(m,n)$

2) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו כי $B(m,n)=\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$, כאשר $m,n>0$.

ב. הוכיחו כי $\int_0^{\pi/2}\sin^{2m-1}x\cos^{2n-1}xdx=\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{2\Gamma(m+n)}$, כאשר $m,n>0$.

3) חשבו את האינטגרלים הבאים:

א. $\int_0^1 x^4(1-x)^3dx$

ב. $\int_0^2\frac{x^2dx}{\sqrt{2-x}}$

ג. $\int_0^a y^4\sqrt{a^2-y^2}dy$

4) חשבו את האינטגרלים הבאים:

א. $\int_0^{\pi/2}\sin^6 xdx$

ב. $\int_0^{\pi/2}\sin^4 x\cos^5 xdx$

ג. $\int_0^{\pi}\cos^4 xdx$

5) הוכיחו כי $\int_0^{\pi/2}\sin^p xdx=\int_0^{\pi/2}\cos^p xdx$ שווה ל-

א. $\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(p-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot p}\frac{\pi}{2}$, אם p שלם חיובי זוגי.

ב. $\frac{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot(p-1)}{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot p}$, אם $p>1$ שלם חיובי אי-זוגי.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו ל-www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

6) חשבו את האינטגרלים הבאים:

א. $\int_0^{\pi/2} \cos^6 x dx$

ב. $\int_0^{\pi/2} \sin^3 x \cos^2 x dx$

ג. $\int_0^{2\pi} \sin^8 x dx$

7) נתון $\int_0^{\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin p\pi}$.

א. הוכיחו כי $\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}$, כאשר $0 < p < 1$.

ב. חשבו $\int_0^{\infty} \frac{dy}{1+y^4}$.

8) חשבו $\int_0^2 x\sqrt[3]{8-x^3} dx$.

9) הוכיחו כי $\int_0^1 \sqrt{1-x^4} dx = \frac{(\Gamma(1/4))^2}{6\sqrt{2\pi}}$.

תשובות סופיות

1) שאלת הוכחה.

2) שאלת הוכחה.

3) א. $\frac{1}{280}$ ב. $\frac{64\sqrt{2}}{15}$ ג. $\frac{\pi a^6}{32}$

4) א. $\frac{5\pi}{32}$ ב. $\frac{8}{315}$ ג. $\frac{3\pi}{8}$

5) שאלות הוכחה.

6) א. $\frac{5\pi}{32}$ ב. $\frac{2}{15}$ ג. $\frac{35\pi}{64}$

7) א. שאלת הוכחה. ב. $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$

8) $\frac{16\pi}{9\sqrt{3}}$

9) שאלת הוכחה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו ל-www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©