מתמטיקה לכלכלנים א

פרק 17 - פונקציות בשני משתנים לכלכלנים - עקומות שוות ערך ונגזרות חלקיות

תוכן העניינים

פונקציות של שני משתנים – קווי גובה

שאלות

1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה: $f(x,y)=\frac{y}{x}$?
שרטט מפת קווי גובה.

2) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה: $f(x,y)=\ln x+\ln y$?
שרטט מפת קווי גובה.

3) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה: $f(x,y)=x^2+y^2$?
שרטט מפת קווי גובה.

4) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה: $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$?
שרטט מפת קווי גובה.

5) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה: $f(x,y)=\ln(x^2-y)$?
שרטט מפת קווי גובה.

6) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה: $f(x,y)=x\sqrt{y}$?
שרטט מפת קווי גובה.

7) תהי: $u(x,y)=(x+p)(y+q)$, $x\geq 0$, $y\geq 0$ פונקציית תועלת של פרט.
הנקודות: $(0,14)$, $(3,2)$, $(1,6)$ מונחות על אותה עקומת אדישות.
א. מצא את p ו- q. הצב אותם בפונקציית התועלת.
ב. מהי משוואת עקומת האדישות עליה מונחות הנקודות הנתונות?
עליך להגיע למשוואה מפורשת. שרטט את עקומת האדישות.

8) שרטט לפונקציה:
$$f(x,y)=\begin{cases} x^2+3x-y-3 & x^2\geq y \\ -x^2+3x+y-3 & x^2<y \end{cases}$$
את קו הגובה: $f(x,y)=1$

9) נגדיר: $f(x,y)=\begin{cases}3x+y & y>x\\ 4x & y\le x\end{cases}$. הנח כי: $x,y\ge 0$.

שרטט את העקומות שוות הערך: $f(x,y)=4,12$ עבור הפונקציה הנתונה.

10) שרטט את מפת העקומות שוות הערך של: $f(x,y)=\min\left\{\frac{x}{3},y\right\}$, $f:R_+^2\to R_+$.

11) שרטט עקומות שוות ערך לפונקציה: $f(x,y)=\min\{3x,y\}$.

12) שרטט לפונקציה: $f(x,y)=\min\{y-x^2,x+y\}$,

את קווי הגובה: $f(x,y)=0$, $f(x,y)=2$.

13) נתונה הפונקציה: $f(x,y)=\begin{cases}x^2-y & x\le 1\\ 2x+y & x>1\end{cases}$.

א. שרטט את קו הגובה: $f(x,y)=0$.

ב. לאילו ערכי C קו הגובה: $f(x,y)=C$ יהיה קו רציף?
ציייר את קו הגובה במקרה זה.

14) פונקציית התועלת של פרט הצורך את המוצרים x ו- y

היא: $u(x,y)=\begin{cases}y-x^2+4x & x\le 4\\ x-y & 4<x\le 6\\ y-\ln x & 6<x\end{cases}$.

א. שרטט את קו הגובה: $u(x,y)=3$.

ב. הסבר מהי המשמעות הכלכלית של קו הגובה שמצאת.

ג. ידוע כי הפרט צורך את הכמויות $(4,8)$.
האם הפרט יהיה אדיש במעבר לצריכת הכמויות $(7,9)$?

15) שרטט את מפת העקומות שוות הערך של: $f(x,y)=100-5x-2y$, $f:R^2\to R$.

באיזה כיוון עליך לזוז מעקומה לעקומה על מנת להגדיל את הערך של f?

16) שרטט עקומות שווה ערך לפונקציה: $f(x,y)=3x-y+3$.

17) שרטט עקומות שווה ערך לפונקציה: $f(x,y)=x^3-y$.

18) שרטט עקומות שווה ערך לפונקציה: $f(x,y)=(x-1)^2+(y+3)^2$.

19) שרטט עקומות שווה ערך לפונקציה: $f(x,y)=e^{x-y}$.

20) שרטט עקומות שווה ערך לפונקציה: $f(x,y)=2\ln x+\ln y$.

21) שרטט לפונקציה: $f(x,y)=(x-y)^2$,
את קווי הגובה: $f(x,y)=4$, $f(x,y)=0$.

תשובות סופיות

1) $x \neq 0$, המישור ללא ציר ה- y .
2) $x > 0, y > 0$, הרביע הראשון ללא הצירים.
3) כל המישור.
4) $x^2 + y^2 \leq 1$, עיגול היחידה.
5) $y < x^2$
6) $y \geq 0$, חצי המישור העליון.
7) א. $u(x,y) = (x+1)\cdot(y+2)$, $p=1$, $q=2$ ב. $y = \frac{16}{x+1} - 2$
8) ראה סרטון.
9) ראה סרטון.
10) ראה סרטון.
11) ראה סרטון.
12) ראה סרטון.
13) א. ראה סרטון. ב. $C = 1.5$
14) א. ראה סרטון. ב. ראה סרטון. ג. הפרט לא אדיש.
15) ראה סרטון.
16) ראה סרטון.
17) ראה סרטון.
18) ראה סרטון.
19) ראה סרטון.
20) ראה סרטון.
21) ראה סרטון.

פונקציות של שני משתנים – נגזרות חלקיות

שאלות

1) נתונה הפונקציה: $f(x,y)=4x^3-3x^2y^2+2x+3y$.
חשב את הנגזרת לפי x ואת הנגזרת לפי y .

2) נתונה הפונקציה: $f(x,y)=x^5\cdot\ln y$.
חשב את הנגזרת לפי x ואת הנגזרת לפי y .

3) נתונה הפונקציה: $f(x,y)=\dfrac{x^2y^4\left(\sqrt{y}+5\ln y\right)}{y^2+5y+y^y}$.
חשב את הנגזרת לפי x .

4) נתונה הפונקציה: $f(x,y)=\left(x^2+y^3\right)\cdot\left(2x+3y\right)$.
חשב את הנגזרת לפי x ואת הנגזרת לפי y .

5) נתונה הפונקציה: $f(x,y)=\dfrac{x^2-3y}{x+y^2}$.
חשב את הנגזרת החלקית לפי x ואת הנגזרת לפי y .

6) חשב את כל הנגזרות החלקיות עד סדר שני עבור: $f(x,y)=x^3+y^3-6xy$.

7) חשב את כל הנגזרות החלקיות עד סדר שני עבור:
$f(x,y)=x^3+y^3+3(1-y)(x-y)$.

8) חשב את כל הנגזרות החלקיות עד סדר שני עבור: $f(x,y)=xy(x-y)$.

9) חשב את כל הנגזרות החלקיות עד סדר שני עבור:
$f(x,y)=(x-9)(2y-6)(4x-3y+12)$.

10) חשב את כל הנגזרות החלקיות עד סדר שני עבור: $f(x,y)=e^{xy}(x+y)$.

11) חשב את כל הנגזרות החלקיות עד סדר שני עבור: $f(x,y)=e^{x+y}\left(x^2+y^2\right)$.

12) חשב את כל הנגזרות החלקיות עד סדר שני עבור: $f(x,y)=\left(x^2+2y^2\right)e^{-\left(x^2+y^2\right)}$.

13) חשב את כל הנגזרות החלקיות עד סדר שני עבור: $f(x,y)=\ln\left(1+x^2+y^2\right)$.

14) חשב את כל הנגזרות החלקיות עד סדר שני עבור: $f(x,y)=\ln\left(x^2+y^2\right)$.

15) חשב את כל הנגזרות החלקיות עד סדר שני עבור: $f(x,y)=\ln\left(\sqrt[3]{x^2+y^2}\right)$.

16) חשב: $f'_{xy}(1,1)$ עבור: $f(x,y)=\ln\left(xy-x^2-y^2\right)$.

17) חשב: $f'_{xy}(1,1)$ עבור: $f(x,y)=\ln\left(x^2+y^2\right)$.

18) חשב: $f'_{xy}(1,1)$ עבור: $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$.

19) נתון: $z(x,y)=\ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)$.

הוכח כי: $x\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+y\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{2}$.

20) נתון: $f(x,y,z)=e^x\cdot\left(y^2-\frac{1}{z}\right)$.

חשב: $\frac{\partial f}{\partial z}\left(0,-1,\frac{1}{2}\right)$, $\frac{\partial f}{\partial y}\left(0,-1,\frac{1}{2}\right)$, $\frac{\partial f}{\partial x}\left(0,-1,\frac{1}{2}\right)$.

21) נתון: $f(x,y)=\frac{x^2}{\ln y+x}$.

חשב: $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(1,e)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,e)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,e)$.

22) חשב את כל הנגזרות החלקיות עד סדר שני עבור:

$f(x,y)=4x^2-x^2y^2+4x+10y$.

23) חשב את כל הנגזרות החלקיות עד סדר שני עבור: $f(x,y)=x^4\cdot\ln y$.

24) חשב את כל הנגזרות החלקיות עד סדר שני עבור: $f(x,y,z)=xyz$.

תשובות סופיות

1) $f_y(x,y)=-6x^2y+3 \;,\; f_x(x,y)=12x^2-6xy^2+2$

2) $f_y(x,y)=\frac{x^5}{y} \;,\; f_x(x,y)=5x^4\ln y$

3) $f_x(x,y)=\frac{y^4\left(\sqrt{y}+5\ln y\right)}{y^2+5y+y^y}\cdot 2x$

4) $f_y(x,y)=(2x+3y)+3\left(x^2+y^2\right) \;,\; f_x(x,y)=2x(2x+3y)+2\left(x^2+y^3\right)$

5) $f_y(x,y)=\frac{-3x-3y^2-2x^2y+6y^2}{\left(x+y^2\right)^2} \;,\; f_x(x,y)=\frac{2x\left(x+y^2\right)-1\left(x^2-3y\right)}{\left(x+y^2\right)^2}$

6) סדר ראשון:

$f_y(x,y)=3y^2-6x \;,\; f_x(x,y)=3x^2-6y$

סדר שני:

$f_{yx}=-6 \;,\; f_{xy}=0-6 \;,\; f_{yy}=6y-0 \;,\; f_{xx}=6x-0$

7) סדר ראשון:

$f_y(x,y)=3y^2+3-3x-6y \;,\; f_x(x,y)=3x^2+3-3y$

סדר שני:

$f_{xy}=f_{yx}=-3 \;,\; f_{yy}=6y-6 \;,\; f_{xx}=6x$

8) סדר ראשון:

$f_y(x,y)=x^2-2xy \;,\; f_x(x,y)=2xy-y^2$

סדר שני:

$f_{xy}=f_{yx}=2x-2y \;,\; f_{yy}=-2x \;,\; f_{xx}=2y$

9) סדר ראשון:

$f_x(x,y)=2\left[8xy-3y^2\cdot 1-24x-0+57y\cdot 1+72+0+0\right]$,

$f_y(x,y)=2\left[4x^2\cdot 1-3x\cdot 2y-0-54y+57x\cdot 1+0+27+0\right]$

סדר שני:

$f_{yy}=2[0-6x\cdot 1-54+0+0] \;,\; f_{xx}=2[8y-0-24]$,

$f_{xy}=f_{yx}=2[8x\cdot 1-6y-0+57+0]$

10) סדר ראשון:

$f_y(x,y)=e^{xy}\left(x^2+xy+1\right) \;,\; f_x(x,y)=e^{xy}\left(xy+y^2+1\right)$

סדר שני:

$f_{yy}=e^{xy}\cdot x\cdot\left(x^2+xy+1\right)+(0+x)\cdot e^{xy} \;,\; f_{xx}=e^{xy}\cdot y\cdot\left(xy+y^2+1\right)+(y+0+0)\cdot e^{xy}$,

$f_{xy}=f_{yx}=e^{xy}\cdot x\cdot\left(xy+y^2+1\right)+(x+2y)\cdot e^{xy}$

11) סדר ראשון:

$$f_y(x,y)=e^{x+y}\left(x^2+y^2+2y\right)\ ,\ f_x(x,y)=e^{x+y}\left(x^2+y^2+2x\right)$$

סדר שני:

$$,\ f_{yy}=e^{x+y}\cdot\left(x^2+y^2+2y\right)+\left(2y+2\right)\cdot e^{x+y}\ ,\ f_{xx}=e^{x+y}\cdot\left(x^2+y^2+2x\right)+\left(2x+2\right)\cdot e^{x+y}$$

$$f_{xy}=f_{yx}=e^{x+y}\cdot\left(x^2+y^2+2x\right)+2y\cdot e^{x+y}$$

12) סדר ראשון:

$$f_y(x,y)=e^{-x^2-y^2}\left(4y-2x^2y-4y^3\right)\ ,\ f_x(x,y)=e^{-x^2-y^2}\left(2x-2x^3-4xy^2\right)$$

סדר שני:

$$,\ f_{xx}=e^{-x^2-y^2}\left(-2x\right)\cdot\left(2x-2x^3-4xy^2\right)+\left(2-6x^2-4y^2\right)\cdot e^{-x^2-y^2}$$

$$,\ f_{yy}=e^{-x^2-y^2}\left(-2y\right)\cdot\left(4y-2x^2y-4y^3\right)+\left(4-2x^2-12y^2\right)\cdot e^{-x^2-y^2}$$

$$f_{xy}=f_{yx}=e^{-x^2-y^2}\left(-2y\right)\cdot\left(2x-2x^3-4xy^2\right)+\left(-4x\cdot 2y\right)\cdot e^{-x^2-y^2}$$

13) סדר ראשון:

$$f_y(x,y)=\frac{2y}{1+x^2+y^2}\ ,\ f_x(x,y)=\frac{2x}{1+x^2+y^2}$$

סדר שני:

$$,\ f_{yy}=\frac{2\cdot\left(1+x^2+y^2\right)-2y\cdot 2y}{\left(1+x^2+y^2\right)^2}\ ,\ f_{xx}=\frac{2x\left(1+x^2+y^2\right)+2x\cdot 2x}{\left(1+x^2+y^2\right)^2}$$

$$f_{xy}=f_{yx}=\frac{0\cdot\left(1+x^2+y^2\right)-2y\cdot 2x}{\left(1+x^2+y^2\right)^2}$$

14) סדר ראשון:

$$f_y(x,y)=\frac{2y}{x^2+y^2}\ ,\ f_x(x,y)=\frac{2x}{x^2+y^2}$$

סדר שני:

$$,\ f_{yy}=\frac{2\left(x^2+y^2\right)-2y\cdot 2y}{\left(x^2+y^2\right)^2}\ ,\ f_{xx}=\frac{2\left(x^2+y^2\right)-2x\cdot 2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

$$f_{xy}=f_{yx}=\frac{0\left(x^2+y^2\right)-2y\cdot 2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

15) ראה סרטון.

16) $f_{xy}(1,1)=-2$

17) $f_{xy}(1,1)=1$

18) $f_{xy}(1,1)=\frac{-1}{2\sqrt{2}}$

19) הוכחה.

20) $f_x=-1$, $f_y=-2$, $f_z=4$

21) $f_{xx}=\frac{1}{4}$, $f_{yy}=\frac{\frac{4}{e^2}\left(1+\frac{1}{e}\right)}{16}$, $f_{xy}=f_{yx}=-\frac{1}{4e}$

22) סדר ראשון:

$f_x(x,y)=8x-2xy^2+4$, $f_y(x,y)=-2x^2y+10$

סדר שני:

$f_{xx}=8-2y^2$, $f_{yy}=-2x^2$, $f_{xy}=f_{yx}=-4xy$

23) סדר ראשון:

$f_x(x,y)=4x^3\ln y$, $f_y(x,y)=x^4\cdot\frac{1}{y}$

סדר שני:

$f_{xx}=12x^2\ln y$, $f_{yy}=-\frac{x^4}{y^2}$, $f_{xy}=f_{yx}=\frac{4x^3}{y}$

24) סדר ראשון:

$f_x(x,y,z)=yz\cdot 1$, $f_y(x,y)=xz\cdot 1$, $f_z(x,y,z)=xy\cdot 1$

סדר שני:

$f_{xx}=0$, $f_{yy}=0$, $f_{zz}=0$, $f_{xy}=f_{yx}=z\cdot 1$, $f_{xz}=y\cdot 1$, $f_{yz}=x\cdot 1$