

# מתמטיקה לחשבונאים ב

פרק 3 - פונקציות בשני משתנים לכלכלנים - עקומות שוות ערך ונגזרות חלקיות

תוכן העניינים

1. פונקציות של שני משתנים - קווי גובה..... 1
2. נגזרות חלקיות..... 5

## פונקציות של שני משתנים – קווי גובה

### שאלות

- (1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה:  $f(x, y) = \frac{y}{x}$ ?  
שרטט מפת קווי גובה.
- (2) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה:  $f(x, y) = \ln x + \ln y$ ?  
שרטט מפת קווי גובה.
- (3) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה:  $f(x, y) = x^2 + y^2$ ?  
שרטט מפת קווי גובה.
- (4) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה:  $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ ?  
שרטט מפת קווי גובה.
- (5) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה:  $f(x, y) = \ln(x^2 - y)$ ?  
שרטט מפת קווי גובה.
- (6) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה:  $f(x, y) = x\sqrt{y}$ ?  
שרטט מפת קווי גובה.
- (7) תהי:  $u(x, y) = (x+p)(y+q)$ ,  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$  פונקציית תועלת של פרט.  
הנקודות:  $(0, 14)$ ,  $(3, 2)$ ,  $(1, 6)$  מונחות על אותה עקומת אדישות.  
א. מצא את  $p$  ו- $q$ . הצב אותם בפונקציית התועלת.  
ב. מהי משוואת עקומת האדישות עליה מונחות הנקודות הנתונות?  
עליך להגיע למשוואה מפורשת. שרטט את עקומת האדישות.
- (8) שרטט לפונקציה:  $f(x, y) = \begin{cases} x^2 + 3x - y - 3 & x^2 \geq y \\ -x^2 + 3x + y - 3 & x^2 < y \end{cases}$   
את קו הגובה:  $f(x, y) = 1$

$$(9) \text{ נגדיר: } f(x, y) = \begin{cases} 3x + y & y > x \\ 4x & y \leq x \end{cases} \text{ . הנח כי: } x, y \geq 0$$

שרטט את העקומות שוות הערך:  $f(x, y) = 4, 12$  עבור הפונקציה הנתונה.

$$(10) \text{ שרטט את מפת העקומות שוות הערך של: } f: R_+^2 \rightarrow R_+, f(x, y) = \min \left\{ \frac{x}{3}, y \right\}$$

$$(11) \text{ שרטט עקומות שוות ערך לפונקציה: } f(x, y) = \min \{3x, y\}$$

$$(12) \text{ שרטט לפונקציה: } f(x, y) = \min \{y - x^2, x + y\}$$

$$\text{את קווי הגובה: } f(x, y) = 0, f(x, y) = 2$$

$$(13) \text{ נתונה הפונקציה: } f(x, y) = \begin{cases} x^2 - y & x \leq 1 \\ 2x + y & x > 1 \end{cases}$$

$$\text{א. שרטט את קו הגובה: } f(x, y) = 0$$

ב. לאילו ערכי  $C$  קו הגובה:  $f(x, y) = C$  יהיה קו רציף?  
צייר את קו הגובה במקרה זה.

(14) פונקציית התועלת של פרט הצורך את המוצרים  $x$  ו- $y$

$$u(x, y) = \begin{cases} y - x^2 + 4x & x \leq 4 \\ x - y & 4 < x \leq 6 \\ y - \ln x & 6 < x \end{cases} \text{ היא:}$$

$$\text{א. שרטט את קו הגובה: } u(x, y) = 3$$

ב. הסבר מהי המשמעות הכלכלית של קו הגובה שמצאת.

ג. ידוע כי הפרט צורך את הכמויות (4,8).

האם הפרט יהיה אדיש במעבר לצריכת הכמויות (7,9)?

$$(15) \text{ שרטט את מפת העקומות שוות הערך של: } f: R^2 \rightarrow R, f(x, y) = 100 - 5x - 2y$$

באיזה כיוון עליך לזוז מעקומה לעקומה על מנת להגדיל את הערך של  $f$ ?

(16) שרטט עקומות שוות ערך לפונקציה:  $f(x, y) = 3x - y + 3$ .

(17) שרטט עקומות שוות ערך לפונקציה:  $f(x, y) = x^3 - y$ .

(18) שרטט עקומות שוות ערך לפונקציה:  $f(x, y) = (x-1)^2 + (y+3)^2$ .

(19) שרטט עקומות שוות ערך לפונקציה:  $f(x, y) = e^{x-y}$ .

(20) שרטט עקומות שוות ערך לפונקציה:  $f(x, y) = 2 \ln x + \ln y$ .

(21) שרטט לפונקציה:  $f(x, y) = (x-y)^2$ ,

את קווי הגובה:  $f(x, y) = 0$ ,  $f(x, y) = 4$ .

### תשובות סופיות

- (1)  $x \neq 0$ , המישור ללא ציר ה- $y$ .
- (2)  $x > 0, y > 0$ , הרביע הראשון ללא הצירים.
- (3) כל המישור.
- (4)  $x^2 + y^2 \leq 1$ , עיגול היחידה.
- (5)  $y < x^2$
- (6)  $y \geq 0$ , חצי המישור העליון.
- (7) א.  $u(x, y) = (x+1) \cdot (y+2)$ ,  $p=1, q=2$
- ב.  $y = \frac{16}{x+1} - 2$
- (8) ראה סרטון.
- (9) ראה סרטון.
- (10) ראה סרטון.
- (11) ראה סרטון.
- (12) ראה סרטון.
- (13) א. ראה סרטון.
- ב.  $C=1.5$
- (14) א. ראה סרטון.
- ב. ראה סרטון.
- ג. הפרט לא אדיש.
- (15) ראה סרטון.
- (16) ראה סרטון.
- (17) ראה סרטון.
- (18) ראה סרטון.
- (19) ראה סרטון.
- (20) ראה סרטון.
- (21) ראה סרטון.

## פונקציות של שני משתנים – נגזרות חלקיות

### שאלות

(1) נתונה הפונקציה:  $f(x, y) = 4x^3 - 3x^2y^2 + 2x + 3y$ .  
 חשב את הנגזרת לפי  $x$  ואת הנגזרת לפי  $y$ .

(2) נתונה הפונקציה:  $f(x, y) = x^5 \cdot \ln y$ .  
 חשב את הנגזרת לפי  $x$  ואת הנגזרת לפי  $y$ .

(3) נתונה הפונקציה:  $f(x, y) = \frac{x^2 y^4 (\sqrt{y} + 5 \ln y)}{y^2 + 5y + y^y}$ .  
 חשב את הנגזרת לפי  $x$ .

(4) נתונה הפונקציה:  $f(x, y) = (x^2 + y^3) \cdot (2x + 3y)$ .  
 חשב את הנגזרת לפי  $x$  ואת הנגזרת לפי  $y$ .

(5) נתונה הפונקציה:  $f(x, y) = \frac{x^2 - 3y}{x + y^2}$ .  
 חשב את הנגזרת החלקית לפי  $x$  ואת הנגזרת לפי  $y$ .

(6) חשב את כל הנגזרות החלקיות עד סדר שני עבור:  $f(x, y) = x^3 + y^3 - 6xy$ .

(7) חשב את כל הנגזרות החלקיות עד סדר שני עבור:  
 $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3(1 - y)(x - y)$

(8) חשב את כל הנגזרות החלקיות עד סדר שני עבור:  $f(x, y) = xy(x - y)$ .

(9) חשב את כל הנגזרות החלקיות עד סדר שני עבור:  
 $f(x, y) = (x - 9)(2y - 6)(4x - 3y + 12)$

(10) חשב את כל הנגזרות החלקיות עד סדר שני עבור:  $f(x, y) = e^{-xy}(x + y)$ .

(11) חשב את כל הנגזרות החלקיות עד סדר שני עבור:  $f(x, y) = e^{x+y}(x^2 + y^2)$

(12) חשב את כל הנגזרות החלקיות עד סדר שני עבור:  $f(x, y) = (x^2 + 2y^2)e^{-(x^2+y^2)}$

(13) חשב את כל הנגזרות החלקיות עד סדר שני עבור:  $f(x, y) = \ln(1 + x^2 + y^2)$

(14) חשב את כל הנגזרות החלקיות עד סדר שני עבור:  $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$

(15) חשב את כל הנגזרות החלקיות עד סדר שני עבור:  $f(x, y) = \ln(\sqrt[3]{x^2 + y^2})$

(16) חשב:  $f'_{xy}(1,1)$  עבור:  $f(x, y) = \ln(xy - x^2 - y^2)$

(17) חשב:  $f'_{xy}(1,1)$  עבור:  $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$

(18) חשב:  $f'_{xy}(1,1)$  עבור:  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

(19) נתון:  $z(x, y) = \ln(\sqrt{x} + \sqrt{y})$

הוכח כי:  $x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2}$

(20) נתון:  $f(x, y, z) = e^x \cdot \left(y^2 - \frac{1}{z}\right)$

חשב:  $\frac{\partial f}{\partial x}\left(0, -1, \frac{1}{2}\right), \frac{\partial f}{\partial y}\left(0, -1, \frac{1}{2}\right), \frac{\partial f}{\partial z}\left(0, -1, \frac{1}{2}\right)$

(21) נתון:  $f(x, y) = \frac{x^2}{\ln y + x}$

חשב:  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, e), \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1, e), \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1, e)$

**(22)** חשב את כל הנגזרות החלקיות עד סדר שני עבור :

$$f(x, y) = 4x^2 - x^2y^2 + 4x + 10y$$

**(23)** חשב את כל הנגזרות החלקיות עד סדר שני עבור :  $f(x, y) = x^4 \cdot \ln y$

**(24)** חשב את כל הנגזרות החלקיות עד סדר שני עבור :  $f(x, y, z) = xyz$

## תשובות סופיות

$$f_y(x, y) = -6x^2y + 3, \quad f_x(x, y) = 12x^2 - 6xy^2 + 2 \quad (1)$$

$$f_y(x, y) = \frac{x^5}{y}, \quad f_x(x, y) = 5x^4 \ln y \quad (2)$$

$$f_x(x, y) = \frac{y^4(\sqrt{y} + 5 \ln y)}{y^2 + 5y + y^y} \cdot 2x \quad (3)$$

$$f_y(x, y) = (2x + 3y) + 3(x^2 + y^2), \quad f_x(x, y) = 2x(2x + 3y) + 2(x^2 + y^3) \quad (4)$$

$$f_y(x, y) = \frac{-3x - 3y^2 - 2x^2y + 6y^2}{(x + y^2)^2}, \quad f_x(x, y) = \frac{2x(x + y^2) - 1(x^2 - 3y)}{(x + y^2)^2} \quad (5)$$

סדר ראשון: (6)

$$f_y(x, y) = 3y^2 - 6x, \quad f_x(x, y) = 3x^2 - 6y$$

סדר שני:

$$f_{yx} = -6, \quad f_{xy} = 0 - 6, \quad f_{yy} = 6y - 0, \quad f_{xx} = 6x - 0$$

סדר ראשון: (7)

$$f_y(x, y) = 3y^2 + 3 - 3x - 6y, \quad f_x(x, y) = 3x^2 + 3 - 3y$$

סדר שני:

$$f_{xy} = f_{yx} = -3, \quad f_{yy} = 6y - 6, \quad f_{xx} = 6x$$

סדר ראשון: (8)

$$f_y(x, y) = x^2 - 2xy, \quad f_x(x, y) = 2xy - y^2$$

סדר שני:

$$f_{xy} = f_{yx} = 2x - 2y, \quad f_{yy} = -2x, \quad f_{xx} = 2y$$

סדר ראשון: (9)

$$f_x(x, y) = 2[8xy - 3y^2 \cdot 1 - 24x - 0 + 57y \cdot 1 + 72 + 0 + 0]$$

$$f_y(x, y) = 2[4x^2 \cdot 1 - 3x \cdot 2y - 0 - 54y + 57x \cdot 1 + 0 + 27 + 0]$$

סדר שני:

$$f_{yy} = 2[0 - 6x \cdot 1 - 54 + 0 + 0], \quad f_{xx} = 2[8y - 0 - 24]$$

$$f_{xy} = f_{yx} = 2[8x \cdot 1 - 6y - 0 + 57 + 0]$$

סדר ראשון: (10)

$$f_y(x, y) = e^{xy}(x^2 + xy + 1), \quad f_x(x, y) = e^{xy}(xy + y^2 + 1)$$

סדר שני:

$$f_{yy} = e^{xy} \cdot x \cdot (x^2 + xy + 1) + (0 + x) \cdot e^{xy}, \quad f_{xx} = e^{xy} \cdot y \cdot (xy + y^2 + 1) + (y + 0 + 0) \cdot e^{xy}$$

$$f_{xy} = f_{yx} = e^{xy} \cdot x \cdot (xy + y^2 + 1) + (x + 2y) \cdot e^{xy}$$

**(11) סדר ראשון:**

$$f_y(x, y) = e^{x+y}(x^2 + y^2 + 2y), \quad f_x(x, y) = e^{x+y}(x^2 + y^2 + 2x)$$

**סדר שני:**

$$, f_{yy} = e^{x+y} \cdot (x^2 + y^2 + 2y) + (2y + 2) \cdot e^{x+y}, \quad f_{xx} = e^{x+y} \cdot (x^2 + y^2 + 2x) + (2x + 2) \cdot e^{x+y}$$

$$f_{xy} = f_{yx} = e^{x+y} \cdot (x^2 + y^2 + 2x) + 2y \cdot e^{x+y}$$

**(12) סדר ראשון:**

$$f_y(x, y) = e^{-x^2-y^2}(4y - 2x^2y - 4y^3), \quad f_x(x, y) = e^{-x^2-y^2}(2x - 2x^3 - 4xy^2)$$

**סדר שני:**

$$, f_{xx} = e^{-x^2-y^2}(-2x) \cdot (2x - 2x^3 - 4xy^2) + (2 - 6x^2 - 4y^2) \cdot e^{-x^2-y^2}$$

$$, f_{yy} = e^{-x^2-y^2}(-2y) \cdot (4y - 2x^2y - 4y^3) + (4 - 2x^2 - 12y^2) \cdot e^{-x^2-y^2}$$

$$f_{xy} = f_{yx} = e^{-x^2-y^2}(-2y) \cdot (2x - 2x^3 - 4xy^2) + (-4x \cdot 2y) \cdot e^{-x^2-y^2}$$

**(13) סדר ראשון:**

$$f_y(x, y) = \frac{2y}{1+x^2+y^2}, \quad f_x(x, y) = \frac{2x}{1+x^2+y^2}$$

**סדר שני:**

$$, f_{yy} = \frac{2 \cdot (1+x^2+y^2) - 2y \cdot 2y}{(1+x^2+y^2)^2}, \quad f_{xx} = \frac{2x(1+x^2+y^2) + 2x \cdot 2x}{(1+x^2+y^2)^2}$$

$$f_{xy} = f_{yx} = \frac{0 \cdot (1+x^2+y^2) - 2y \cdot 2x}{(1+x^2+y^2)^2}$$

**(14) סדר ראשון:**

$$f_y(x, y) = \frac{2y}{x^2+y^2}, \quad f_x(x, y) = \frac{2x}{x^2+y^2}$$

**סדר שני:**

$$, f_{yy} = \frac{2(x^2+y^2) - 2y \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}, \quad f_{xx} = \frac{2(x^2+y^2) - 2x \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_{xy} = f_{yx} = \frac{0(x^2+y^2) - 2y \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}$$

**(15) ראה סרטון.**

$$f_{xy}(1,1) = -2 \quad \mathbf{(16)}$$

$$f_{xy}(1,1) = 1 \quad \mathbf{(17)}$$

$$f_{xy}(1,1) = \frac{-1}{2\sqrt{2}} \quad \mathbf{(18)}$$

**(19) הוכחה.**

$$f_z = 4, f_y = -2, f_x = -1 \quad (20)$$

$$f_{xy} = f_{yx} = -\frac{1}{4e}, f_{yy} = \frac{4}{e^2} \left(1 + \frac{1}{e}\right), f_{xx} = \frac{1}{4} \quad (21)$$

סדר ראשון: (22)

$$f_y(x, y) = -2x^2y + 10, f_x(x, y) = 8x - 2xy^2 + 4$$

סדר שני:

$$f_{xy} = f_{yx} = -4xy, f_{yy} = -2x^2, f_{xx} = 8 - 2y^2$$

סדר ראשון: (23)

$$f_y(x, y) = x^4 \cdot \frac{1}{y}, f_x(x, y) = 4x^3 \ln y$$

סדר שני:

$$f_{xy} = f_{yx} = \frac{4x^3}{y}, f_{yy} = -\frac{x^4}{y^2}, f_{xx} = 12x^2 \ln y$$

סדר ראשון: (24)

$$f_z(x, y, z) = xy \cdot 1, f_y(x, y) = xz \cdot 1, f_x(x, y, z) = yz \cdot 1$$

סדר שני:

$$f_{yz} = x \cdot 1, f_{xz} = y \cdot 1, f_{xy} = f_{yx} = z \cdot 1, f_{zz} = 0, f_{yy} = 0, f_{xx} = 0$$