# הסתברות

## פרק 29 - פונקציה יוצרת מומנטים

### תוכן העניינים

1. כללי ..... 1

# פונקציה יוצרת מומנטים:

## רקע:

פונקציה יוצרת מומנטים של משתנה מקרי כלשהו מוגדרת להיות: $M_X(t)=E\left(e^{tx}\right)$.

אם מדובר במשתנה מקרי בדיד, הפונקציה יוצרת המומנטים תהיה:

$$M_X(t)=E\left(e^{t\,X}\right)=\sum_k e^{tk}\cdot P(X=k)$$.

אם מדובר במשתנה מקרי רציף, פונקציית יוצרת המומנטים תהיה:

$$M_X(t)=E\left(e^{t\,x}\right)=\int_x e^{tx}\cdot f(x)\,dx$$.

המומנט מסדר $n$ מוגדר להיות: $E\left(X^n\right)$.

מומנט מסדר $n$ של משתנה מקרי $X$ מתקבל מהנגזרת ה-$n$ית לפי $t$ של פונקציית יוצרת המומנטים $M_X(t)$ בנקודה שבה $t=0$. כלומר: $M_x^{(n)}(t)|_{t=0}=E\left(X^n\right)$.

## משפט:

קיימת התאמה חד-חד-ערכית בין משתנה מקרי לבין פונקציית יוצרת המומנטים שלו.

## תזכורת מתמטית לנגזרות:

$$\left(x^n\right)'=nx^{n-1}$$

$$\left(k\cdot f(x)\right)'=k\cdot f'(x)$$

$$\left(a^x\right)'=a^x\cdot\ln a$$

$$\left(e^x\right)'=e^x$$

$$\left(\log_a x\right)'=\frac{1}{x\ln a}$$

$$\left(\ln x\right)'=\frac{1}{x}$$


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

$$(k)' = 0$$

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$$

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{(g(x))^2}$$

$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ - כלל שרשרת

דוגמה (פתרון בהקלטה):

הראו שהפונקציה יוצרת המומנטים של ההתפלגות המעריכית: $X \sim \exp(\lambda)$,

היא: $\frac{\lambda}{\lambda - t}$. מצאו את המומנט הראשון והמומנט השני של ההתפלגות.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## שאלות:

**1)** נתונה פונקציה ההסתברות הבאה למשתנה מקרי בדיד.

א. מצאו את פונקציית יוצרת המומנטים.

ב. מצאו את התוחלת על סמך סעיף א'.

| $X$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $P(X)$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{6}$ |

**2)** מצאו את פונקציית יוצרת המומנטים של התפלגות הבינומית: $X \sim B(n,p)$,
ומצאו את המומנט הראשון והשני של הפונקציה.

**3)** מצאו את פונקציית יוצרת המומנטים של ההתפלגות הגיאומטרית: $X \sim G(P)$,
וחשבו את תוחלת של ההתפלגות מתוך פונקציית יוצרת המומנטים.

**4)** מצאו את פונקציית יוצרת מומנטים של התפלגות הפואסונית: $x \sim p(\lambda)$.
מצאו את המומנט הראשון והשני של ההתפלגות.

**5)** יהי $X$ משתנה מקרי בעל פונקציית הצפיפות הבאה:

$$f(x)=\begin{cases} Ae^{-x} & 0 \le x \le 7 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}.$$

א. מצאו את ערכו של $A$.

ב. מצאו את הפונקציה יוצרת המומנטים של $X$.

**6)** יהי $X$ משתנה מקרי עם תוחלת 5 ושונות 16, ותהי $m_x(t)$ פונקציית יוצרת המומנטים של $X$. $Y$ הינו משתנה מקרי עם פונקציית יוצרת מומנטים $m_y(t)$,
ונתון: $m_y(t)=t\cdot m_x(t)$.

חשבו את התוחלת והשונות של $Y$.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## תשובות סופיות:

1) א. פונקציה יוצרת מומנטים: $\frac{1}{2}e^{t}+\frac{1}{3}e^{2t}+\frac{1}{6}e^{3t}$ . ב. $1\frac{2}{3}$.

2) פונקציה יוצרת מומנטים: $\left(e^{t}\cdot p+1-p\right)^{n}$.

3) פונקציה יוצרת מומנטים: $\frac{e^{t}p}{1-e^{t}\cdot\left(1-p\right)}$.

4) פונקציה יוצרת מומנטים: $e^{\lambda\left(e^{t}-1\right)}$.

5) א. $\frac{1}{1-e^{-7}}$. ב. פונקציה יוצרת מומנטים: $\frac{e^{7}}{e^{7}-1}\cdot\frac{e^{7(t-1)}-1}{t-1}$.

6) תוחלת: 1, שונות: 9.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## נספחים:

| התפלגות | פונקציית צפיפות $f(X)t$ | פונקציית התפלגות מצטברת $f(X)t$ |
|---|---|---|
| אחיד $U(a,b)$ | $f_x(t)=\begin{cases}\frac{1}{(b-a)} & a\le t\le b\\ 0 & else\end{cases}$ | $f_x(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ \frac{t-a}{b-a} & a\le t\le b\\ 1 & t<b\end{cases}$ |
| מעריכי $\exp(\lambda)$ | $f_x(t)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda t} & t\ge 0\end{cases}$ | $f_x(t)=\begin{cases}1-e^{-\lambda t} & t\ge 0\\ 0 & else\end{cases}$ |
| נורמלית $N(\mu,\sigma^2)$ | $f_x(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ | $\phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)$ |

| התפלגות | $E(X)$ | $VAR(X)$ | $M_X(t)$ |
|---|---|---|---|
| אחיד $U(a,b)$ | $\frac{b-a}{2}$ | $\frac{(b-a)^2}{12}$ | $\frac{e^{t\,b}-e^{t\,a}}{t(b-a)}$ |
| מעריכי $\exp(\lambda)$ | $\frac{1}{\lambda}$ | $\frac{1}{\lambda^2}$ | $\frac{\lambda}{\lambda-t}$ |
| נורמלית $N(\mu,\sigma^2)$ | $\mu$ | $\sigma^2$ | $e^{\mu t+\frac{\sigma^2 t^2}{2}}$ |


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

| משתנה מקרי | משמעות | $P_X(x)$ | $E(x)$ | $Var(x)$ | $M_X(t)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| בינומי $Bin(n,p)$ | חוזרים באופן בלתי תלוי על אותו ניסוי ברנולי $n$ פעמים: $P$ ההסתברות להצלחה. $1-P=q$ ההסתברות לכישלון $X$ - מספר ההצלחות | $\binom{n}{x}p^x q^{n-x}$ $x=0,1,...,n$ | $n\cdot p$ | $n\cdot p\cdot q$ | $\left[pe^t+q\right]^n$ |
| גיאומטרי $G(P)$ | חוזרים באופן בלתי תלוי על אותו ניסוי ברנולי עד ההצלחה הראשונה. $X$ - מספר ניסויים עד הצלחה ראשונה. | $pq^{x-1}$ $x=1,2,...,\infty$ | $\frac{1}{p}$ | $\frac{q}{p^2}$ | $\frac{pe^t}{1-qe^t}$ |
| פואסוני $Pois(\lambda)$ | $X$ - מספר ההופעות בילידת זמן. מ"מ המקבל ערכים $0,1,...,\infty$. | $e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}$ | $\lambda$ | $\lambda$ | $e^{\lambda(e^t-1)}$ |