

# חשמל גלים ואופטיקה

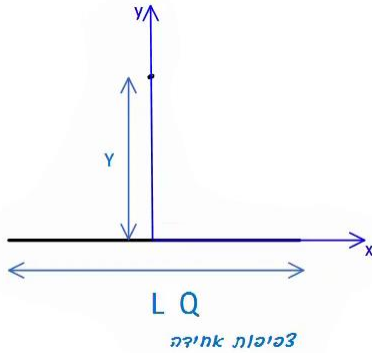
פרק 14 - פוטנציאל עם אינטגרלים

תוכן העניינים

1. שיטה 1, סופרפוזיציה..... 1
2. שיטה 2, שאלות חוק גאוס..... 2
3. סיכום ותרגילים נוספים..... 4

## שיטה 1, סופרפוזיציה:

### שאלות:



### (1) שיטה ראשונה, סופרפוזיציה

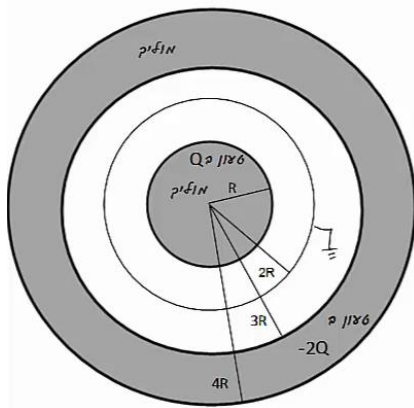
תיל באורך  $L$  טעון במטען כולל  $Q$  המפולג בתיל בצורה אחידה. התיל מונח על ציר ה- $x$ . מצא את הפוטנציאל על ציר ה- $y$  העובר במרכז התיל.

### תשובות סופיות:

$$\varphi = k\lambda \ln \left| \frac{\frac{L}{\alpha} + \sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + y^2}}{-\frac{L}{\alpha} + \sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + y^2}} \right| \quad (1)$$

## שיטה 2, שאלות חוק גאוס:

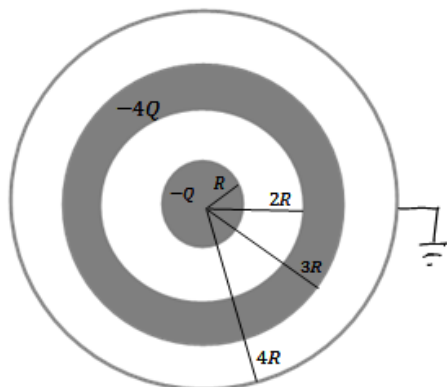
### שאלות:



- (1) דרך שניה, שאלות חוק גאוס  
 כדור מוליך בעל רדיוס  $R$  טעון במטען  $Q$ .  
 מסביב לכדור ברדיוס  $2R$ , נמצאת מעטפת כדורית דקה, מוליכה ומוארקת.  
 כל המערכת מוקפת במעטפת עבה ומוליכה עם רדיוס פנימי  $3R$  ורדיוס חיצוני  $4R$ .  
 המעטפת החיצונית טעונה במטען  $-2Q$  (ראה ציור).  
 לכדור ולמעטפות מרכז משותף,  $Q$ ,  $R$  נתונים.  
 א. מהו הפוטנציאל בכל המרחב?  
 ומהי התפלגות המטען בכל המרחב?

- (2) פוטנציאל של קליפה כדורית  
 מצא את הפוטנציאל בכל המרחב של קליפה כדורית ברדיוס  $R$  הטעונה במטען כולל  $Q$ . הנח שהמטען מפוזר בצורה אחידה על השפה.

### (3) קליפות גליליות מוליכות



- גליל מוליך בעל רדיוס  $R$  ואורך  $L$  טעון במטען  $-Q$ .  
 סביב הגליל נמצאת קליפה גלילית עבה ומוליכה, בעלת רדיוס פנימי  $2R$  ורדיוס חיצוני  $3R$ .  
 אורך הקליפה הוא  $L$  גם כן.  
 הקליפה טעונה במטען כולל של  $-4Q$ .  
 מסביב לקליפה העבה נמצאת קליפה דקה מוליכה ומוארקת ברדיוס  $4R$  ואורך זהה.  
 הנח כי  $L \gg R$  ולקליפות ציר מרכזי משותף.  
 א. כיצד מתפלג המטען במערכת?  
 ב. מה הפוטנציאל בכל המרחב?  
 ג. פרוטון בעל מסה  $m_p$  ומטען  $|e|$  משוחרר ממנוחה במרחק  $r=2R$ .  
 מהי מהירות הפרוטון לאחר שעבר מרחק  $R$ ?

### (4) שדה ופוטנציאל של כדור מלא

- נתון כדור מלא בעל רדיוס  $R$  וצפיפות מטען נפחית אחידה  $p$ .  
 א. מצא את פונקציית השדה בכל המרחב.  
 ב. מצא את פונקציית הפוטנציאל בכל המרחב.

## תשובות סופיות:

$$\text{התפלגות: ראה סרטון} \quad \varphi = \begin{cases} C_1 & r < R \\ \frac{kQ}{r} + C_2 & R < r < 2R \\ \frac{k(Q+q)}{r} + C_3 & 2R < r < 3R \\ C_4 & 3R < r < 4R \\ \frac{k(q-Q)}{r} + C_5 & 4R < r \end{cases} \quad \text{א. פוטנציאל: (1)}$$

$$\varphi = \begin{cases} \frac{KQ}{R} & r < R \\ \frac{KQ}{r} & R > r \end{cases} \quad \text{(2)}$$

$$\varphi = \frac{Q}{2\pi L \epsilon_0} \cdot \begin{cases} \ln \frac{1}{2} + 5 \ln \frac{3}{4} & r < R \\ \ln \frac{r}{2R} + 5 \ln \frac{3}{4} & R < r < 2R \\ 5 \ln \frac{3}{4} & 2R < r < 3R \quad \text{ב.} \\ 5 \ln \frac{r}{4R} & 3R < r < 4R \\ 0 & 4R < r \end{cases} \quad \text{א. ראה סרטון (3)}$$

$$v = \sqrt{\frac{|e|Q \ln 2}{\pi L \epsilon_0 m_p}} \quad \text{ג.}$$

$$\varphi = \begin{cases} -\frac{\rho r^2}{6\epsilon_0} + C_1 & r < R \\ -\left(-\frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r}\right) + C_2 & R < r \end{cases} \quad \text{ב.} \quad E = \begin{cases} \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \hat{r} & r < R \\ \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} \hat{r} & R < r \end{cases} \quad \text{א. (4)}$$

## תרגילים נוספים:

### שאלות:

#### (1) יצירת היסוד קיריום

בשנת 1944 המדענים גלן סיבורג (חתן פרס נובל לכימיה), ראלף גיימס ואלברט גיורסו ייצרו לראשונה את היסוד הכימי שמספרו 96 וקראו לו "קיריום" על שם מארי קירי. לשם כך הם "הפציצו" גרעינים של פלוטוניום (שמספרו האטומי 94, כלומר יש לו 94 פרוטונים) בגרעיני הליום – 4 (בהם יש 2 פרוטונים ושני נויטרונים, והמסה שלו היא:  $M = 6.6 \times 10^{-27} \text{ kg}$ ).

- אפשר להתייחס בקירוב אל גרעין הפלוטוניום כאל כדור ברדיוס:  $R = 7 \times 10^{-15} \text{ m}$ , בו המטען של 94 הפרוטונים מפוזר באופן אחיד בנפחו. אם כך, מה הפוטנציאל על פניו (יחסית לאינסוף)?
- מה צריכה להיות האנרגיה של גרעין ההליום בשביל שהוא יוכל להגיע אל פני גרעין הפלוטוניום? תנו את התשובה גם ביחידות eV וגם ביחידות J.
- מה צריכה להיות המהירות שלו רחוק מהגרעין ("באינסוף")?
- באיזה מרחק ממרכז הגרעין המהירות שלו יורדת ל-80% מהמהירות בסעיף ג'?

#### (2) דיפול

במרחב נמצאים שני מטענים:

$$\vec{r}_1 = -a\hat{y} = (-a, 0, 0) \text{ בנקודה } q_1 = -q$$

$$\vec{r}_2 = a\hat{y} = (a, 0, 0) \text{ בנקודה } q_2 = -q$$

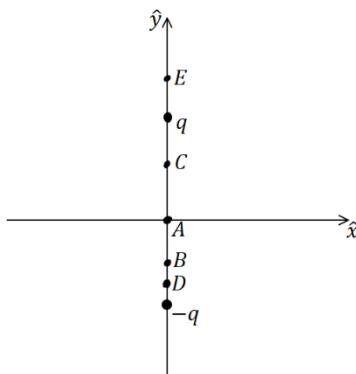
א. מה הפוטנציאל (יחסית לאינסוף), ומה השדה החשמלי בכל אחת מהנקודות

$$\text{הבאות: } \vec{r}_A = 0, \vec{r}_B = -\frac{1}{2}a\hat{y}, \vec{r}_C = \frac{1}{2}a\hat{y}, \vec{r}_D = -\frac{3}{4}a\hat{y}, \vec{r}_E = \frac{3}{2}a\hat{y}$$

ב. היכן הפוטנציאל (יחסית לאינסוף) מתאפס? תארו את המקום הגאומטרי של כל הנקודות בהן זה קורה.

ג. ציירו גרפים סכמתיים של הפוטנציאל לאורך ציר y ולאורך שני צירים שמקבילים לציר x בשני מרחקים שונים.

ד. ציירו את קווי השדה ואת המשטחים שווי הפוטנציאל.



**3) מטען  $q$  ומטען  $3q$** 

במרחב נמצאים שני מטענים.

מטען  $3q$  בנקודה  $(a, 0, 0)$  ומטען  $-q$  בנקודה  $(-a, 0, 0)$ .

- מה הפוטנציאל  $\varphi$  (יחסית לאינסוף) ומה השדה החשמלי בראשית הצירים.
- מצאו על ציר  $x$  שתי נקודות בהן הפוטנציאל מתאפס.
- מה השדה החשמלי בשתי הנקודות שמצאתם בסעיף ב'?
- הראו שהמקום הגאומטרי של כל הנקודות בהן הפוטנציאל יחסית לאינסוף מתאפס הוא כדור. מצאו את הרדיוס שלו ואת מרכזו (בשביל למצוא את הרדיוס והמרכז אפשר להיעזר בתוצאה של סעיף ב').
- מצאו איפה השדה החשמלי מתאפס. מה הפוטנציאל שם?
- ציירו גרף סכמתי של הפוטנציאל לאורך ציר  $x$ . ציינו את המיקומים של נקודות בהן הפוטנציאל ידוע ואת ערכו בהן.

**4) כדור  $\Omega$  מחבר בין שני כדורים**

הכדורים 1 ו-2 בתמונה הם מוליכים המקובעים

במקומם וטעונים במטען זהה.

הנח שהכדורים מאוד מרוחקים זה מזה

וידוע שהכוח הפועל עליהם הוא  $F$ .

הכדור השלישי גם הוא זהה אך אינו טעון.

מצמידים את הכדור השלישי לכדור

הראשון וממתינים עד שהמערכת תתייצב.

לאחר מכן מנתקים את הכדור השלישי ומצמידים

אותו לכדור השני. שוב ממתינים עד שהמערכת תתייצב.

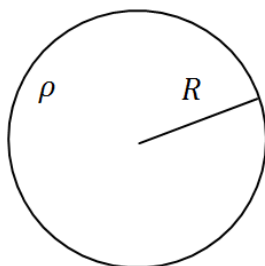
לבסוף מרחיקים את הכדור השלישי לגמרי.

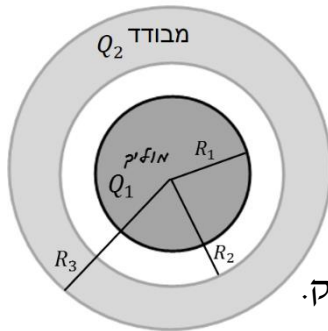
מהו הכוח בין הכדורים 1 ו-2 לאחר כל התהליך?

**5) פוטנציאל של גליל מלא טעון בצפיפות אחידה**

מצא את הפוטנציאל בכל המרחב של גליל אינסופי

ברדיוס  $R$  וצפיפות מטען אחידה ונתונה  $\rho$ .




**6) כדור מוליך מוקף בקליפה מבודדת**

- כדור מוליך בעל רדיוס  $R_1$  טעון במטען  $Q_1$ .  
 הכדור נמצא במרכזה של קליפה כדורית מבודדת  
 בעלת רדיוס פנימי  $R_2$  ורדיוס חיצוני  $R_3$ .  
 הקליפה טעונה באופן הומוגני במטען  $Q_2$ .
- א. חשב השדה החשמלי והפוטנציאל בכל המרחב.  
 ב. חזור על החישוב הזה במקרה שבו הכדור מוארק.

## תשובות סופיות:

$$(1) \quad \text{א. } 1.93 \cdot 10^7 \text{ V} \quad \text{ב. } 6.17 \cdot 10^{-12} \text{ J}$$

$$\text{ג. } v = 4.32 \cdot 10^7 \frac{\text{m}}{\text{sec}} \quad \text{ד. } r = 1.95 \cdot 10^{-14} \text{ m}$$

$$(2) \quad \text{א. ראה סרטון} \quad \text{ב. } y = 0$$

$$\text{ג. ראה סרטון} \quad \text{ד. ראה סרטון}$$

$$(3) \quad \text{א. פוטנציאל: } \frac{2kq}{\alpha}, \text{ שדה חשמלי: } -\frac{k4q}{d^2} \hat{x} \quad \text{ב. } x_1 = -\frac{1}{2}a, x_2 = -2a$$

$$\text{ג. } x_1 = -\frac{kq}{a^2} \cdot \frac{16}{3} \hat{x}, x_2 = \frac{kq}{a^2} \cdot \frac{2}{3} \hat{x} \quad \text{ד. רדיוס: } R = \frac{3}{4}a, \text{ מרכז: } \left(-\frac{5}{4}a, 0, 0\right)$$

$$\text{ה. איפוס השדה: } x_2 = -3.73a, \text{ הפוטנציאל בנקודה זו: } 0.27 \frac{kq}{a}$$

ו. ראו סרטון.

$$(4) \quad \frac{3}{8}F$$

$$(5) \quad \varphi = \begin{cases} -\frac{\rho}{4\epsilon_0}(r^2 - R^2) & r \leq R \\ -\frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \ln \frac{r}{R} & r \geq R \end{cases}$$

$$(6) \quad \vec{E} = \begin{cases} 0 & r < R_1 \\ \frac{kQ_1}{r^2} \hat{r} & R_1 < r < R_2 \\ \frac{k}{r^2} \left( Q_1 + Q_2 \left( \frac{r^3 - R_2^3}{R_3^3 - R_2^3} \right) \right) \hat{r} & R_2 < r < R_3 \\ \frac{k(Q_1 + Q_2)}{r^2} \hat{r} & R_3 < r \end{cases} \quad \text{א.}$$

$$\text{ב.} \quad \varphi(r) = \begin{cases} C_1 & r < R_1 \\ \frac{kQ_1}{r} + C_2 & R_1 < r < R_2 \\ \frac{kQ_1}{r} - \frac{kQ_2 r^2}{2(R_3^3 - R_2^3)} - \frac{kQ_2 R_2^3}{(R_3^3 - R_2^3)r} + C_3 & R_2 < r < R_3 \\ \frac{k(Q_1 + Q_2)}{r} + C_4 & R_3 < r \end{cases}$$