

# מתמטיקה לכלכלנים א

פרק 9 - ערכים עצמיים-וקטורים עצמיים-לכסון מטריצות - דימיון

תוכן העניינים

1. לכסון מטריצות - תרגילי חישוב.....1
2. דימיון מטריצות.....5

## לכסון מטריצות – תרגילי חישוב

### שאלות

עבור כל אחת מהמטריצות בשאלות 1-4:

- מצאו מטריצה אופיינית.
- מצאו פולינום אופייני.
- מצאו ערכים עצמיים ואת הריבוב האלגברי של כל ערך עצמי.
- מצאו מרחבים עצמיים ואת הריבוב הגיאומטרי של כל ערך עצמי.
- מצאו וקטורים עצמיים.
- קבעו האם המטריצה ניתנת ללכסון.
- במידה והמטריצה ניתנת ללכסון, לכסנו אותה.
- כלומר, מצאו מטריצה הפיכה  $P$ , כך ש- $P^{-1}AP = D$ , באשר  $D$  מטריצה אלכסונית.
- במידה והמטריצה ניתנת ללכסון, חשבו  $A^{2009}$ .
- מצאו את הפולינום המינימלי.
- קבעו האם המטריצה הפיכה לפי ערכיה העצמיים.
- במידה והמטריצה הפיכה, בטאו את  $A^{-1}$  בעזרת  $A$  ו- $I$  בלבד, תוך שימוש במשפט קיילי המילטון.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

- עבור כל אחת מהמטריצות בשאלות 5-6 מצאו ערכים עצמיים ו-וקטורים עצמיים.
- במידה והמטריצה ניתנת ללכסון, לכסנו אותה.
- כלומר, מצאו מטריצה הפיכה  $P$ , כך ש- $P^{-1}AP = D$ , כאשר  $D$  מטריצה אלכסונית.
- פתרו פעם מעל  $\mathbb{C}$  ופעם מעל  $\mathbb{R}$ .

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

עבור כל אחת מהמטריצות בשאלות 7-11 מצאו ערכים עצמיים ו-וקטורים עצמיים:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \quad (10)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (11)$$

(12) תהי  $A$  מטריצה ממשית ריבועית מסדר  $3 \times 3$ .

ידוע כי הווקטורים העצמיים של המטריצה הם  $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

והם מתאימים לערכים העצמיים:  $\lambda_1 = 6$ ,  $\lambda_2 = 2$ ,  $\lambda_3 = -4$ .

מצאו את המטריצה  $A$ .

(13) קבעו האם קיימת מטריצה ממשית ריבועית מסדר  $3 \times 3$ ,

בעלת וקטורים עצמיים  $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ,  $v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ ,  $v_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$

המתאימים לערכים העצמיים:  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 2$ ,  $\lambda_3 = 3$ .

במידה וקיימת מטריצה כזאת, מצאו אותה.

## תשובות סופיות

$$(1) \quad \text{א.} \begin{bmatrix} x & -2 & 1 \\ 0 & x-2 & 1 \\ 0 & -1 & x \end{bmatrix} \quad \text{ב.} \quad p(x) = x(x-1)^2 \quad \text{ג.} \quad x=0, x=1$$

הריבוב האלגברי של  $x=1$  הוא 2, והריבוב האלגברי של  $x=0$  הוא 1.

ד.  $V_{x=1} = sp\{\langle 1, 1, 1 \rangle\}$  – ריבוב גיאומטרי : 1.

$V_{x=0} = sp\{\langle 1, 0, 0 \rangle\}$  – ריבוב גיאומטרי : 1.

ה.  $\langle 1, 1, 1 \rangle, \langle 1, 0, 0 \rangle$  – ו-ח. לא ניתנת.

ט.  $m(x) = x(x-1)^2 \quad \deg = 3$  – הפולינום האופייני הוא גם הפולינום המינימלי.  
י. לא הפיכה.

$$(2) \quad \text{א.} \begin{bmatrix} x-1 & -1 & 0 \\ 0 & x-1 & 0 \\ 0 & 0 & x-2 \end{bmatrix} \quad \text{ב.} \quad p(x) = (x-1)^2(x-2) \quad \text{ג.} \quad x=1, x=2$$

הריבוב האלגברי של  $x=1$  הוא 2, והריבוב האלגברי של  $x=2$  הוא 1.

ד.  $V_{x=1} = sp\{\langle 1, 0, 0 \rangle\}$  – ריבוב גיאומטרי : 1.

$V_{x=2} = sp\{\langle 0, 0, 1 \rangle\}$  – ריבוב גיאומטרי : 1.

ה.  $\langle 0, 0, 1 \rangle, \langle 1, 0, 0 \rangle$  – ו-ח. לא ניתנת.

ט.  $m(x) = (x-1)^2(x-2) \quad \deg = 3$  – הפולינום האופייני הוא גם המינימלי.  
י. הפיכה.

$$(3) \quad \text{א.} \begin{bmatrix} x-1 & 0 & -1 \\ 0 & x-1 & 0 \\ -1 & 0 & x-1 \end{bmatrix} \quad \text{ב.} \quad p(x) = x(x-1)(x-2) \quad \text{ג.} \quad x=0, x=1, x=2$$

$x=0$  – ריבוב אלגברי : 1,  $x=1$  – ריבוב אלגברי : 1,  $x=2$  – ריבוב אלגברי : 1.

ד.  $V_{x=0} = sp\{\langle -1, 0, 1 \rangle\}$  – ריבוב גיאומטרי : 1.

$V_{x=1} = sp\{\langle 0, 1, 0 \rangle\}$  – ריבוב גיאומטרי : 1.

$$\text{ה.} \quad \langle 0, 1, 0 \rangle, \langle 1, 0, 1 \rangle, \langle -1, 0, 1 \rangle \quad \text{ו. ניתנת ללכסון.} \quad \text{ז.} \quad P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{ח.} \quad \begin{bmatrix} 2^{2016} & 0 & 2^{2016} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{2016} & 0 & 2^{2016} \end{bmatrix} \quad \text{ט.} \quad m(x) = x(x-1)(x-2) \quad \text{י. לא הפיכה.}$$

$$(4) \quad \begin{matrix} \text{א.} & \begin{bmatrix} x+1 & -3 & 0 \\ -3 & x+1 & 0 \\ 2 & 2 & x-6 \end{bmatrix} \\ \text{ב.} & p(x) = (x-6)(x-2)(x+4) \end{matrix}$$

$$\text{ג. } x=6, x=2, x=-4$$

$$x=-4 - \text{ריבוב אלגברי: } 1, x=2 - \text{ריבוב אלגברי: } 1, x=6 - \text{ריבוב אלגברי: } 1.$$

$$\text{ד. } V_{x=6} = sp\{\langle 0, 0, 1 \rangle\} - \text{ריבוב גיאומטרי: } 1.$$

$$V_{x=2} = sp\{\langle 1, 1, 1 \rangle\} - \text{ריבוב גיאומטרי: } 1.$$

$$V_{x=-4} = sp\{\langle -1, 1, 0 \rangle\} - \text{ריבוב גיאומטרי: } 1.$$

$$\text{ה. } \langle 0, 0, 1 \rangle, \langle -1, 1, 0 \rangle, \langle 1, 1, 1 \rangle \quad \text{ו. ניתנת ללכסון.} \quad \text{ז. } P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{ח. } \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2^{2017} + (-4)^{2017} & 2^{2017} - (-4)^{2017} & 0 \\ 2^{2017} - (-4)^{2017} & 2^{2017} + (-4)^{2017} & 0 \\ -6^{2017} + 2^{2017} & -6^{2017} + 2^{2017} & 2 \cdot 6^{2017} \end{bmatrix}$$

$$\text{ט. } m(x) = (x-6)(x-2)(x+4) \quad \text{י. הפיכה.}$$

$$(5) \quad \text{אין פתרונות מעל } \mathbb{R}, \text{ ולכן אין ערכים עצמיים וקטורים עצמיים.}$$

$$\text{מעל } \mathbb{C}: x = 1 \pm 2i, v_{x=1+2i} = \langle 1+i, 2 \rangle, v_{x=1-2i} = \langle 1-i, 2 \rangle$$

$$A = \begin{bmatrix} 1+i & 1-i \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1+2i & 0 \\ 1 & 1-2i \end{bmatrix}$$

$$(6) \quad \text{ערכים עצמיים: } x=3, \text{ וקטורים עצמיים: } v_{x=3} = \langle -1, 1 \rangle. \text{ לא ניתנת ללכסון.}$$

$$(7) \quad \text{ערכים עצמיים: } x_1=2, x_{2,3}=3$$

$$\text{וקטורים עצמיים: } v_{x=3}^{(1)} = (1, 0, 1), v_{x=3}^{(2)} = (1, 1, 0), v_{x=2} = (1, 1, 1)$$

$$(8) \quad v_{x=-2} = (-1, 1, 1), v_{x=3} = (1, 2, 1), v_{x=1} = (-1, 4, 1), x=1, x=3, x=-2$$

$$(9) \quad v_{x=-1} = (-1, 0, 1), v_{x=4} = (1, 1, 1), v_{x=1} = (1, -2, 1), x=1, x=4, x=-1$$

$$(10) \quad v_{x=3} = (1, 2), v_{x=1} = (-1, 2), x=-1, x=3$$

$$(11) \quad v_{x=1+\sqrt{3}i} = (1-\sqrt{3}i, 1+\sqrt{3}i, -2), v_{x=1} = \langle 1, 1, 1 \rangle, x=1, x=1 \pm \sqrt{3}i$$

$$v_{x=1-\sqrt{3}i} = (1+\sqrt{3}i, 1-\sqrt{3}i, -2)$$

$$(12) \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$(13) \quad \text{אין כזו מטריצה.}$$

## דמיון מטריצות

### שאלות

(1) ידוע ש- $A$  ו- $B$  מטריצות דומות. הוכיחו כי:

א.  $|A| = |B|$

ב.  $\text{tr}(A) = \text{tr}(B)$

ג. ל- $A$  ו- $B$  אותו פולינום אופייני.

(2) הוכיחו באינדוקציה: אם  $P^{-1}AP = B$ , אז  $A^n = PB^nP^{-1}$ .

(3) ענו על הסעיפים הבאים:

א. ידוע כי  $A$  מטריצה ממשית מסדר  $n$  וידוע כי  $A$  דומה למטריצה  $4A$ . הוכיחו כי  $A$  מטריצה לא הפיכה.

ב. הוכיחו שהמטריצות  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  ו- $4A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  דומות.

(4) נתונות שתי מטריצות ממשיות:  $A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & -8 & -5 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 7 & 0 \\ 9 & -17 & 6 \end{pmatrix}$ .

האם קיימים קבועים ממשיים  $a, b$ , כך שהמטריצה  $A$  דומה למטריצה  $B$ ?

(5) נתונות שלוש מטריצות ריבועיות מסדר  $n$ :  $A, B, C$ . הוכיחו כי:

א.  $A$  דומה לעצמה.

ב. אם  $A$  דומה ל- $B$ , אז  $B$  דומה ל- $A$ .

ג. אם  $A$  דומה ל- $B$  ו- $B$  דומה ל- $C$ , אז  $A$  דומה ל- $C$ .

ד. אם  $A$  דומה ל- $B$  ושתייהן הפיכות, אז  $A^{-1}$  דומה ל- $B^{-1}$ .

ה. אם  $A$  דומה ל- $B$ , אז  $A^k$  דומה ל- $B^k$ , לכל  $k$  טבעי.

ו. אם  $A$  דומה ל- $B$  ו- $q(x)$  פולינום, אז  $q(A)$  דומה ל- $q(B)$ .

ז. אם  $A$  דומה ל- $B$ , אז  $A^T$  דומה ל- $B^T$ .

ח. אם  $A$  דומה ל- $B$ , אז  $\text{rank}(A) = \text{rank}(B)$ .

ט. אם  $A$  דומה ל- $B$ , אז  $\text{Nullity}(A) = \text{Nullity}(B)$ .

**הערה** –  $\text{Nullity}(A) =$  מימד מרחב הפתרונות של המערכת ההומוגנית  $Ax = 0$ .

(6) הוכיחו או הפריכו :

- א. אם לשתי מטריצות מסדר 3 אותו פולינום אופייני, הן דומות.  
 ב. אם לשתי מטריצות מסדר 3 אותו פולינום מינימלי, הן דומות.  
 ג. אם לשתי מטריצות אותו פולינום אופייני ואותו פולינום מינימלי, אז הן דומות.

ד. המטריצות הבאות דומות  $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$   $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(7) ידוע שלמטריצה ריבועית  $A$  מסדר 3 יש ערכים עצמיים 0, 1 ו-2. חשבו כל אחד מהבאים או הסבירו מדוע לא ניתן לעשות זאת :

א.  $\text{rank}(A)$

ב.  $\dim \text{Ker}(A)$

ג.  $\text{tr}(A)$

ד.  $|A^T A|$

ה. ע"ע עבור  $A^T A$ .

ו. ע"ע עבור  $(4A^2 + 10A + I)^{-1}$ .

**הערה**  $\dim \text{Ker}(A) = \text{Nullity}(A)$

(8) הוכיחו כי למטריצות דומות אותו פולינום מינימלי.

(9) ענו על הסעיפים הבאים :

- א.  $A$  ו- $B$  שתי מטריצות הדומות למטריצה  $C$ .  
 הוכיחו כי  $A$  דומה ל- $B$ .

ב. הוכיחו שהמטריצות הבאות דומות:  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$

(10) עבור אילו ערכים של  $x$  המטריצות הבאות דומות :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & x & 2 \end{pmatrix}$$

**(11)** הוכיחו שכל אחת מהמטריצות הבאות אינה דומה לאף אחת מהאחרות:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

**(12)** נתונות שתי מטריצות  $A, B \in M_n[\mathbb{R}]$ .

נתון כי  $A$  ניתנת ללכסון.

הוכיחו:

$B$  דומה ל- $A$  אם ורק אם  $B$  ניתנת ללכסון והיא בעלת אותם ע"ע כמו של  $A$ .

**(13)** נתונות המטריצות  $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & a & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  ו- $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ , כאשר  $a, b \in \mathbb{R}$ .

עבור אילו ערכים של  $a$  ו- $b$  המטריצות  $A$  ו- $B$  דומות?

**(14)** נתונות המטריצות  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 3 & 0 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix}$  ו- $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ , כאשר  $a \in \mathbb{R}$ .

קבעו האם קיימת מטריצה הפיכה  $P$  כך ש- $P^{-1}AP = B$ .

**(15)** נתונות המטריצות  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & n-1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & n \end{pmatrix}$  ו- $B = \begin{pmatrix} n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & n-1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

קבעו האם המטריצות דומות. אם כן, מצאו מטריצה הפיכה  $P$ , כך ש-

$$P^{-1}AP = B$$

**(16)** תהיינה  $A, B$  מטריצות ב- $M_n(\mathbb{R})$ , בעלות דרגה 1, וכן  $\text{tr}(A) = \text{tr}(B) = k$ , כאשר

$k$  מספר ממשי שונה מ-0.

א. מצאו את הפולינום האופייני של  $A$  ו- $B$ .

ב. הוכיחו ש- $A$  ו- $B$  דומות.

**(17)** תהי  $A$  מטריצה מסדר  $3 \times 3$  עם פולינום אופייני  $p(t) = (t-1)(t+4)^2$ , ונתון כי  $\rho(4I + A) = 1$ .

- א. רשמו את הפולינום האופייני של  $A^2$ .  
 ב. הוכיחו שהמטריצה  $A^4 - 10A + 9I$  לא הפיכה, ומצאו את ממד מרחב הפתרונות של המערכת  $(A^4 - 10A + 9I)\underline{x} = \underline{0}$ .

**(18)** נתון כי  $A, B, C, D \in M_n(\mathbb{R})$  כך ש- $A$  דומה ל- $B$  ו- $C$  דומה ל- $D$ . הוכיחו או הפריכו:

- א.  $A+C$  דומה ל- $B+D$ .  
 ב.  $AC$  דומה ל- $BD$ .

**(19)** הוכיחו או הפריכו:

- א. אם שתי מטריצות שקולות שורה אז הן דומות.  
 ב. אם שתי מטריצות הן דומות אז הן שקולות שורה.

**(20)** ענו על הסעיפים הבאים:

- א. הוכיחו: אם  $A$  דומה ל- $B$  אז  $A - kI$  דומה ל- $B - kI$ .  
 ב. בדקו האם המטריצות הבאות דומות:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ג. בדקו האם המטריצות הבאות דומות:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

**(21)** נתון כי  $A$  ו- $B$  מטריצות דומות. הוכיחו של- $A$  ו- $B$  אותם ערכים עצמיים עם ריבוי אלגברי וגיאומטרי זהה.

**(22)** תהי  $A$  מטריצה ממשית מסדר  $7 \times 7$ , בעלת דרגה 4. נתון שהפולינום  $q(t) = t^4 - 7t^2 + 10$  מחלק את הפולינום האופייני  $p(t)$  של  $A$ . מצאו את הפולינום האופייני של  $A$ .  
 א. הוכיחו ש- $A$  לכסינה ומצאו מטריצה אלכסונית שדומה לה.  
 ב. מצאו את  $\text{tr}(A^2)$ .

(23) נתונות שתי מטריצות  $A, B \in M_n(R)$ .

הוכיחו או הפריכו :

א. אם  $B+I$  דומה ל-  $I-A$  אז  $A^2$  דומה ל-  $B^2$ .

ב. אם ל-  $A$  ול-  $B$  אותה דרגה, אותו פולינום אופייני, אותה דטרמיננטה ואותו סכום איברי אלכסון (trace) אז הן בהכרח דומות.

### תשובות סופיות

(1) שאלת הוכחה.

(2) שאלת הוכחה.

(3) שאלת הוכחה.

(4) לא.

(5) שאלת הוכחה.

(6) שאלת הוכחה.

(7) א. 2 ב. 1 ג. 3 ד. 0 ה. לא ניתן לחשב. ו.  $1, \frac{1}{15}, \frac{1}{37}$

(8) שאלת הוכחה.

(9) שאלת הוכחה.

(10)  $x=0$

(11) שאלת הוכחה.

(12) שאלת הוכחה.

(13)  $a=0$  ו-  $b=-2$

(14) כן, עבור  $a=\pm 2$

(15) המטריצות דומות ו-  $P$  מטריצה שהאלכסון המשני שלה 1 ושאר האיברים 0.

(16) א.  $p_A(t) = p_B(t) = t^n - kt^{n-1}$  ב. שאלת הוכחה.

(17) א.  $p(x) = (x-1)(x-16)^2$  ב. ממד מרחב הפתרונות הוא 1.

(18) שאלת הוכחה.

(19) שאלת הוכחה.

(20) א. שאלת הוכחה. ב. לא דומות. ג. לא דומות.

(21) שאלת הוכחה.

(22) א.  $D = \text{diag}(0, 0, 0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}, \sqrt{5}, -\sqrt{5})$  ב.  $\text{tr}(A^2) = 14$

(23) שאלת הוכחה.