מתמטיקה לביולוגים חד חוגי מורחב

פרק 25 - ערכים עצמיים-וקטורים עצמיים-לכסון מטריצות - דימיון

תוכן העניינים

ערכים עצמיים, וקטורים עצמיים, לכסון

שאלות

עבור כל אחת מהמטריצות בשאלות **1-5** מצאו ערכים עצמיים ו-וקטורים עצמיים:

1) $A=\begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

2) $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

3) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

4) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

5) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

6) תהי A מטריצה ממשית ריבועית מסדר 3×3.

ידוע כי הווקטורים העצמיים של המטריצה הם $v_3=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_1=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

והם מתאימים לערכים העצמיים: $\lambda_1=6,\ \lambda_2=2\ ,\ \lambda_3=-4$.

מצאו את המטריצה A.

7) קבעו האם קיימת מטריצה ממשית ריבועית מסדר 3×3,

בעלת וקטורים עצמיים $v_3=\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$, $v_2=\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$, $v_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$,

המתאימים לערכים העצמיים: $\lambda_1=1,\ \lambda_2=2\ ,\ \lambda_3=3$.

במידה וקיימת מטריצה כזאת, מצאו אותה.

8) הוכיחו או הפריכו:

א. כל מטריצה הניתנת ללכסון היא הפיכה.

ב. כל מטריצה הניתנת ללכסון היא לא הפיכה.

ג. כל מטריצה הפיכה ניתנת ללכסון.

ד. קיימת מטריצה A אשר הווקטור $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix}$ הוא ו"ע שלה השייך לע"ע 14.

9) נתונה מטריצה ריבועית A.

הוכיחו או הפריכו:

א. 0 ערך עצמי של המטריצה A, אם ורק אם המטריצה איננה הפיכה.

ב. אם A הפיכה ו-λ ע"ע של A, אז $\frac{1}{\lambda}$ הוא ערך עצמי של A^{-1}.

ג. ל-A ול-A^T יש את אותו פולינום אופייני.

ד. ל-A ול-A^T יש את אותם וקטורים עצמיים.

ה. אם סכום האיברים בכל שורה של A הוא λ, אז λ הוא ע"ע של A.

ו. אם $A^{-1} = A^T$ ואם λ הוא ע"ע של A, אז $\lambda = \pm 1$.

ז. אם $A^2 = A$ ואם λ הוא ע"ע של A, אז $\lambda = 0$ או $\lambda = 1$.

תשובות סופיות

1) ערכים עצמיים: $x_1 = 2,\ x_{2,3} = 3$,
וקטורים עצמיים: $V_{x=2} = (1,1,1),\ v_{x=3}^{(2)} = (1,1,0),\ v_{x=3}^{(1)} = (1,0,1)$

2) $x=1,\ x=3,\ x=-2$, $v_{x=1} = (-1,4,1)$, $v_{x=3} = (1,2,1)$, $v_{x=-2} = (-1,1,1)$

3) $x=1,\ x=4,\ x=-1$, $v_{x=1} = (1,-2,1)$, $v_{x=4} = (1,1,1)$, $v_{x=-1} = (-1,0,1)$

4) $x=-1,\ x=3$, $v_{x=1} = (-1,2)$, $v_{x=3} = (1,2)$

5) $x=1, x=1\pm\sqrt{3}i$, $\boldsymbol{v}_{x=1} = \langle 1,1,1\rangle$, $\boldsymbol{v}_{x=1+\sqrt{3}i} = \left(1-\sqrt{3}i, 1+\sqrt{3}i, -2\right)$,
$\boldsymbol{v}_{x=1-\sqrt{3}i} = \left(1+\sqrt{3}i, 1-\sqrt{3}i, -2\right)$

6) $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 6 \end{bmatrix}$

7) אין כזו מטריצה.

8) א. הפרכה: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. ב. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ ג. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
ד. שאלת הוכחה.

9) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה. ג. שאלת הוכחה. ד. הפרכה.
ה. שאלת הוכחה. ו. שאלת הוכחה. ז. שאלת הוכחה.