אלגברה ליניארית

פרק 7 - ערכים עצמיים-וקטורים עצמיים-לכסון מטריצות - דימיון

תוכן העניינים

1. לכסון מטריצות - תרגילי חישוב 1
2. לכסון מטריצות – תרגילי תיאוריה 5
3. חקירת הלכסינות של מטריצה עם פרמטרים 17
4. דמיון מטריצות 21

לכסון מטריצות – תרגילי חישוב

שאלות

עבור כל אחת מהמטריצות בשאלות **1-4**:

א. מצאו מטריצה אופיינית.

ב. מצאו פולינום אופייני.

ג. מצאו ערכים עצמיים ואת הריבוב האלגברי של כל ערך עצמי.

ד. מצאו מרחבים עצמיים ואת הריבוב הגיאומטרי של כל ערך עצמי.

ה. מצאו וקטורים עצמיים.

ו. קבעו האם המטריצה ניתנת ללכסון.

ז. במידה והמטריצה ניתנת ללכסון, לכסנו אותה.
כלומר, מצאו מטריצה הפיכה P, כך ש- $P^{-1}AP=D$, באשר D מטריצה אלכסונית.

ח. במידה והמטריצה ניתנת ללכסון, חשבו A^{2009}.

ט. מצאו את הפולינום המינימלי.

י. קבעו האם המטריצה הפיכה לפי ערכיה העצמיים.
במידה והמטריצה הפיכה, בטאו את A^{-1} בעזרת A ו- I בלבד,
תוך שימוש במשפט קיילי המילטון.

1) $A=\begin{pmatrix}0&2&-1\\0&2&-1\\0&1&0\end{pmatrix}$

2) $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$

3) $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$

4) $A=\begin{pmatrix}-1&3&0\\3&-1&0\\-2&-2&6\end{pmatrix}$

עבור כל אחת מהמטריצות בשאלות **5-6** מצאו ערכים עצמיים ו-וקטורים עצמיים.
במידה והמטריצה ניתנת ללכסון, לכסנו אותה.
כלומר, מצאו מטריצה הפיכה P, כך ש- $P^{-1}AP=D$, כאשר D מטריצה אלכסונית.
פתרו פעם מעל $\mathbb{C}$ ופעם מעל $\mathbb{R}$.

5) $A=\begin{pmatrix}3&-2\\4&-1\end{pmatrix}$

6) $A=\begin{pmatrix}2&-1\\1&4\end{pmatrix}$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

עבור כל אחת מהמטריצות בשאלות **7-11** מצאו ערכים עצמיים ו-וקטורים עצמיים:

7) $A=\begin{pmatrix}4 & -1 & -1\\ 1 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$

8) $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 4\\ 3 & 2 & -1\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}$

9) $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$

10) $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 4 & 1\end{pmatrix}$

11) $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$

12) תהי A מטריצה ממשית ריבועית מסדר 3×3.

ידוע כי הווקטורים העצמיים של המטריצה הם $v_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, v_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, v_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$,

והם מתאימים לערכים העצמיים: $\lambda_1=6,\ \lambda_2=2\ ,\ \lambda_3=-4$.

מצאו את המטריצה A.

13) קבעו האם קיימת מטריצה ממשית ריבועית מסדר 3×3,

בעלת וקטורים עצמיים $v_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, v_2=\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}, v_3=\begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix}$,

המתאימים לערכים העצמיים: $\lambda_1=1,\ \lambda_2=2\ ,\ \lambda_3=3$.

במידה וקיימת מטריצה כזאת, מצאו אותה.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) א. $\begin{bmatrix} x & -2 & 1 \\ 0 & x-2 & 1 \\ 0 & -1 & x \end{bmatrix}$ ב. $p(x)=x(x-1)^2$ ג. $x=0,\ x=1$,

הריבוב האלגברי של $x=1$ הוא 2, והריבוב האלגברי של $x=0$ הוא 1.

ד. $V_{x=1}=sp\{\langle 1,1,1\rangle\}$ – ריבוב גיאומטרי: 1.

$V_{x=0}=sp\{\langle 1,0,0\rangle\}$ – ריבוב גיאומטרי: 1.

ה. $\langle 1,1,1\rangle, \langle 1,0,0\rangle$ ו-ח. לא ניתנת.

ט. $\deg=3$ $m(x)=x(x-1)^2$ – הפולינום האופייני הוא גם הפולינום המינימלי.

י. לא הפיכה.

2) א. $\begin{bmatrix} x-1 & -1 & 0 \\ 0 & x-1 & 0 \\ 0 & 0 & x-2 \end{bmatrix}$ ב. $p(x)=(x-1)^2(x-2)$ ג. $x=1,\ x=2$

הריבוב האלגברי של $x=1$ הוא 2, והריבוב האלגברי של $x=2$ הוא 1.

ד. $V_{x=1}=sp\{\langle 1,0,0\rangle\}$ – ריבוב גיאומטרי: 1.

$V_{x=2}=sp\{\langle 0,0,1\rangle\}$ – ריבוב גיאומטרי: 1.

ה. $\langle 0,0,1\rangle, \langle 1,0,0\rangle$ ו-ח. לא ניתנת.

ט. $\deg=3$ $m(x)=(x-1)^2(x-2)$ – הפולינום האופייני הוא גם המינימלי.

י. הפיכה.

3) א. $\begin{bmatrix} x-1 & 0 & -1 \\ 0 & x-1 & 0 \\ -1 & 0 & x-1 \end{bmatrix}$ ב. $p(x)=x(x-1)(x-2)$ ג. $x=0,\ x=1,\ x=2$

$x=0$ – ריבוב אלגברי: 1, $x=1$ – ריבוב אלגברי: 1, $x=2$ – ריבוב אלגברי: 1.

ד. $V_{x=0}=sp\{\langle -1,0,1\rangle\}$ – ריבוב גיאומטרי: 1.

$V_{x=1}=sp\{\langle 0,1,0\rangle\}$ – ריבוב גיאומטרי: 1.

ה. $\langle 0,1,0\rangle, \langle 1,0,1\rangle, \langle -1,0,1\rangle$ ו. ניתנת ללכסון. ז. $P=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

ח. $\begin{bmatrix} 2^{2016} & 0 & 2^{2016} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{2016} & 0 & 2^{2016} \end{bmatrix}$ ט. $m(x)=x(x-1)(x-2)$ י. לא הפיכה.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

4) א. $\begin{bmatrix} x+1 & -3 & 0 \\ -3 & x+1 & 0 \\ 2 & 2 & x-6 \end{bmatrix}$ ב. $p(x)=(x-6)(x-2)(x+4)$

ג. $x=6,\ x=2,\ x=-4$

$x=-4$ – ריבוב אלגברי: 1, $x=2$ – ריבוב אלגברי: 1, $x=6$ – ריבוב אלגברי: 1.

ד. $V_{x=6}=sp\{\langle 0,0,1\rangle\}$ – ריבוב גיאומטרי: 1.

$V_{x=2}=sp\{\langle 1,1,1\rangle\}$ – ריבוב גיאומטרי: 1.

$V_{x=-4}=sp\{\langle -1,1,0\rangle\}$ – ריבוב גיאומטרי: 1.

ה. $\langle 0,0,1\rangle,\ \langle -1,1,0\rangle,\ \langle 1,1,1\rangle$ ו. ניתנת ללכסון. ז. $P=\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

ח. $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2^{2017}+(-4)^{2017} & 2^{2017}-(-4)^{2017} & 0 \\ 2^{2017}-(-4)^{2017} & 2^{2017}+(-4)^{2017} & 0 \\ -6^{2017}+2^{2017} & -6^{2017}+2^{2017} & 2\cdot 6^{2017} \end{bmatrix}$

ט. $m(x)=(x-6)(x-2)(x+4)$ י. הפיכה.

5) אין פתרונות מעל $\mathbb{R}$, ולכן אין ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים.

מעל $\mathbb{C}$: $x=1\pm 2i$, $\boldsymbol{v}_{x=1+2i}=\langle 1+i,2\rangle$, $\boldsymbol{v}_{x=1-2i}=\langle 1-i,2\rangle$,

$A=\begin{bmatrix} 1+i & 1-i \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$, $D=\begin{bmatrix} 1+2i & 0 \\ 1 & 1-2i \end{bmatrix}$

6) ערכים עצמיים: $x=3$, וקטורים עצמיים: $\boldsymbol{v}_{x=3}=\langle -1,1\rangle$. לא ניתנת ללכסון.

7) ערכים עצמיים: $x_1=2,\ x_{2,3}=3$,

וקטורים עצמיים: $v_{x=3}^{(1)}=(1,0,1),\ v_{x=3}^{(2)}=(1,1,0),\ V_{x=2}=(1,1,1)$

8) $x=1,\ x=3,\ x=-2$, $v_{x=1}=(-1,4,1)$, $v_{x=3}=(1,2,1)$, $v_{x=-2}=(-1,1,1)$

9) $x=1,\ x=4,\ x=-1$, $v_{x=1}=(1,-2,1)$, $v_{x=4}=(1,1,1)$, $v_{x=-1}=(-1,0,1)$

10) $x=-1,\ x=3$, $v_{x=1}=(-1,2)$, $v_{x=3}=(1,2)$

11) $x=1, x=1\pm\sqrt{3}i$, $\boldsymbol{v}_{x=1}=\langle 1,1,1\rangle$, $\boldsymbol{v}_{x=1+\sqrt{3}i}=\left(1-\sqrt{3}i,1+\sqrt{3}i,-2\right)$,

$\boldsymbol{v}_{x=1-\sqrt{3}i}=\left(1+\sqrt{3}i,1-\sqrt{3}i,-2\right)$

12) $A=\begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 6 \end{bmatrix}$

13) אין כזו מטריצה.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

לכסון מטריצות – תרגילי תיאוריה

שאלות

1) נתונה מטריצה ריבועית A.
הוכיחו או הפריכו:

א. 0 ערך עצמי של המטריצה A, אם ורק אם המטריצה איננה הפיכה.

ב. אם A הפיכה ו- λ ע"ע של A, אז $\frac{1}{\lambda}$ הוא ערך עצמי של A^{-1}.

ג. ל-A ול- A^T יש את אותו פולינום אופייני.

ד. ל-A ול- A^T יש את אותם וקטורים עצמיים.

ה. אם סכום האיברים בכל שורה של A הוא λ, אז λ הוא ע"ע של A.

ו. אם $A^{-1}=A^T$ ואם λ הוא ע"ע של A, אז $\lambda=\pm 1$.

ז. אם $A^2=A$ ואם λ הוא ע"ע של A, אז $\lambda=0$ או $\lambda=1$.

2) פתרו את 2 הסעיפים הבאים:

א. ידוע שלמטריצה A יש וקטור עצמי v השייך לערך העצמי 4.
נתונה המטריצה $B=A^4-2A^2+10A-4I$.
הוכיחו ש- v וקטור עצמי גם של המטריצה B וחשבו את הערך העצמי המתאים לו.

ב. נתון ש- v וקטור עצמי של מטריצה A השייך לערך עצמי λ.
יהי $p(x)$ פולינום.
הוכיחו ש- v ו"ע של המטריצה $p(A)$ השייך לערך עצמי $p(\lambda)$.

3) פתרו את 2 הסעיפים הבאים:

א. נתונה מטריצה ריבועית A מסדר 2.

1. הוכיחו כי הפולינום האופייני של המטריצה שווה ל-
$p(x)=x^2-\mathrm{tr}(A)x+|A|$.

2. נתון כי $\mathrm{tr}(A)=4$. חשבו את $|A|$, אם ידוע בנוסף שלמטריצה יש ערך עצמי אחד.

ב. נתונה מטריצה ריבועית A מסדר n.
נניח כי $p(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x^1+a_0$ הפולינום האופייני של A.
הוכיחו כי $a_{n-1}=-\mathrm{tr}(A)$, $a_0=(-1)^n|A|$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

4) נתונה מטריצה A מסדר n.
הוכיחו:
א. λ ע"ע של $A \Leftrightarrow rank(A-\lambda I)<n$.
ב. הריבוי הגיאומטרי של ע"ע λ שווה ל- $n-rank(A-\lambda I)$.
ג. אם $rank(A)=k<n$ אז 0 ע"ע של המטריצה A מריבוי גיאומטרי $n-k$.
מה ניתן לומר על הריבוי האלגברי במקרה זה.

5) נתונה מטריצה ריבועית B מסדר 4. ידוע כי $rank(B)=1$.
הוכיחו:
א. 0 ע"ע של המטריצה B.
ב. הריבוי הגיאומטרי של הע"ע 0 הוא 3.
ג. הריבוי האלגברי של הע"ע 0 הוא 3 או 4.
ד. למטריצה B לכל היותר 2 ערכים עצמיים.
ה. אם למטריצה B ע"ע פרט ל-0 אז הוא שווה ל- $tr(B)$.

6) נתונה מטריצה $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ 4a & 4b & 4c \\ 10a & 10b & 10c \end{pmatrix}$ $(a,b,c\in\mathbb{R})$.
ידוע שלמטריצה קיים ערך עצמי $\lambda=k\neq 0$.
הוכיחו שהמטריצה ניתנת ללכסון ומצאו מטריצה אלכסונית הדומה ל-A.

7) תהיינה A ו-B מטריצות מסדר n המקיימות $AB=BA$.
נניח כי $rankA=n-1$ ו- v וקטור עצמי השייך לערך העצמי 0 של המטריצה.
הוכיחו כי v הוא וקטור עצמי של המטריצה B.

8) תהי A מטריצה מסדר 3 המקיימת $0<rank(A-10I)<rank(A-4I)<3$.
א. מצאו את הפולינום האופייני של המטריצה A.
ב. מצאו את הערכים העצמיים של A ואת הריבוי האלגברי והגיאומטרי של כל ע"ע.
ג. קבעו האם A ניתנת ללכסון. אם כן, מצאו מטריצה אלכסונית הדומה ל-A.
ד. קבעו האם A הפיכה?
ה. הוכיחו כי $(A-10I)^2(A-4I)=0$. האם ייתכן ש- $A=4I$ או $A=10I$?

9) תהי A מטריצה מסדר 5×5, כך ש- $\det A=12$ וגם $\rho(I+A)=\rho(2I-A)=3$.
הוכיחו ש- A לכסינה, ורשמו מטריצה אלכסונית דומה לה.

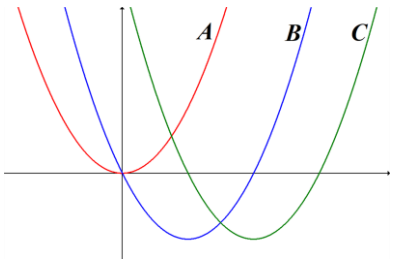
כתב ופתר – גיא סלומון ©

10) נתונה מטריצה $A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$ (מטריצה עם שורה אחת).
מצאו את הערכים העצמיים של המטריצה A^TA (הניחו $n>1$).

11) תהי A מטריצה מסדר 3×3, כך ש- $A\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\4\\-4\end{pmatrix}$, וכן $\rho(2I+A)<\rho(4I-A)$.
הוכיחו ש- A לכסינה.

12) תהי A מטריצה מסדר 3×3 המקיימת $\rho(2I-A)>\rho(5I+A)$.
ידוע גם ש- $span\{(3,1,-1)\}$ הוא מרחב הפתרונות של המערכת $A\underline{x}=2\underline{x}$.
הוכיחו ש- A לכסינה, ורשמו את כל המטריצות האלכסוניות הדומות ל- A.

13) באיור שלפניך הגרפים של הפולינום האופייני של 3 מטריצות A, B ו- C מסדר 2.
ידוע שהמטריצה A ניתנת ללכסון.
מצאו את הדרגה של כל אחת מהמטריצות והוכיחו שגם המטריצות B ו- C ניתנות ללכסון.



14) תהי A מטריצה ממשית מסדר 3.
נתון כי $\det(A)=tr(A)=0$ וכי $\lambda=1$ ערך עצמי של המטריצה.
הוכיחו כי המטריצה ניתנת לליכסון ומצאו את כל הערכים העצמיים שלה.

15) יהיו $A,B\in M_2[\mathbb{R}]$.
ידוע כי $A=AB-BA$.
הוכיחו כי $A^2=0$.

16) תהי A מטריצה ממשית לא הפיכה מסדר 2 כך ש- $tr(A)\neq -1$.

א. הוכיחו כי $(I+A)^{-1}=I-\frac{1}{1+tr(A)}A$.

ב. בעזרת סעיף א מצאו את $\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}^{-1}$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

17) נתונה מטריצה ריבועית A מסדר n.
ויהיו $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$ הערכים העצמיים של המטריצה.
הוכיחו:

א. $|A|=\prod_{i=1}^{n}\lambda_i$

ב. $tr(A)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i$

הערה:
הערכים העצמיים של המטריצה מתקבלים ממציאת השורשים של הפולינום האופייני מעל $\mathbb{C}$. בנוסף, הערכים העצמיים לא בהכרח שונים זה מזה.

18) נתונה מטריצה ממשית A מסדר 2.

א. אם $tr(A)=3,\ tr(A^2)=5$. מצאו את $|A|$.

ב. אם וקטורי העמודה של A מקבילים ואם $tr(A)=5$ מצאו את $tr(A^2)$.

ג. אם $|A|=5$ ואם ל-A ע"ע שהם מספרים שלמים וחיוביים מהו $tr(A)$.

19) תהי A מטריצה מסדר 3 שמקיימת $|A|=1$.

א. אם $\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ הוא ערך עצמי של A מצאו את כל הע"ע של A.

ב. ידוע כי $A^{100}=aA^2+bA+cI$.
מצאו את a,b,c.

20) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הפולינום האופייני של מטריצה A הוא $p_A(x)=x^2+bx+c$.
מצאו את הפולינום האופייני $p_{4A}(x)$ של המטריצה $4A$.

ב. מטריצה $A\in M_2[R]$ מקיימת $|A|<0$.
הוכיחו שהמטריצה ניתנת ללכסון.

21) תהי A מטריצה ריבועית עם פולינום אופייני $p(t)=(t-2)^2(t+1)^2(t-5)^8(t+3)^7$.

א. מה הדרגה של A?

ב. ידוע שקיימת מטריצה P הפיכה כך ש-$AP=PD$, כאשר D אלכסונית.
חשבו את הדרגה של $A-5I$.

22) תהי $A=\begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$ מטריצה ממשית.

א. נסמן את הע"ע של A על ידי α ו- β.
הוכיחו שהם ממשיים.

ב. הניחו ש- $\alpha=\beta$, והוכיחו ש- $A=\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$.

23) תהי A מטריצה לכסינה מעל $\mathbb{C}$, שהפולינום האופייני שלה $p(t)=t^4+2it^3+3t^2$.

הוכיחו שהמטריצה A^2-3A+I לכסינה מעל $\mathbb{C}$, ורשמו מטריצה אלכסונית הדומה לה.

24) ענו על הסעיפים הבאים:

א. תהי A מטריצה ריבועית מעל $\mathbb{R}$, בעלת פולינום אופייני $p(t)=t^3-2t+5$.
הוכיחו שלכל $b\in R^3$ יש למערכת $A\mathbf{x}=b$ פתרון יחיד ומצאו את $|A|$ ו- $tr(A)$.

ב. תהי A מטריצה ממשית, כאשר $A\neq I$, ובעלת פולינום אופייני $p(t)=(t-1)^3$.
הוכיחו ש- A הפיכה, וחשבו את $\mathrm{tr}(A-2I)$.

25) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו ש- λ ע"ע של A אם ורק אם $A-\lambda I$ לא הפיכה.

ב. תהי A מטריצה ריבועית, עם פולינום אופייני $p(t)=(t-1)(t+2)^{n-1}$,
כאשר $n\geq 2$.
הוכיחו שהמטריצה $C=A^2+A-2I$ לא הפיכה, ושהמטריצה $D=A^2-2I$ הפיכה.

26) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הגדירו והדגימו את המונח מטריצה נילפוטנטית.

ב. הוכיחו שכל הערכים העצמיים של מטריצה נילפוטנטית הם אפס.

ג. האם הטענה ההפוכה לטענה בסעיף ב נכונה? הוכיחו או הפריכו.

ד. הוכיחו שאם A מטריצה נילפוטנטית מסדר n אז $A^n=0$.

ה. תהי A מטריצה נילפוטנטית מסדר n, ותהי $B=A-I$.
מצאו את $|B|$.

27) צטטו את המשפט בנוגע לחישוב פולינום מינימלי של מטריצת בלוקים.
בעזרת המשפט לעיל חשב את הפולינום המינימלי של המטריצה הבאה:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

28) תהי $A=(a_{ij})$ מטריצה שהאיברים שלה נתונים על ידי: $a_{ij}=\begin{cases} ij & i\neq j \\ 1+ij & i=j \end{cases}$.
חשבו את $|A|$.

29) נסחו את המשפט בנוגע לחישוב פולינום אופייני של מטריצת בלוקים.

א. בעזרת המשפט לעיל חשבו את הפולינום האופייני של המטריצה הבאה:

$$M=\begin{pmatrix} 9 & 8 & 5 & 7 \\ -1 & 3 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

ב. הוכיחו את המשפט מסעיף א.

30) נתונות שתי מטריצות ריבועיות, A ו-B, מסדר n. הוכיחו או הפריכו:

א. ל-AB ו-BA אותם ערכים עצמיים.

ב. נניח ש-v וקטור עצמי, שונה מאפס, של A ו-B,
אז v גם הוא וקטור עצמי של המטריצה $4A+10B$.

31) תהי A מטריצה ריבועית הניתנת ללכסון.

א. הוכיחו כי לכל סקלר k, המטריצה $A+kI$ ניתנת ללכסון.

ב. אם 4 הוא ערך עצמי של המטריצה A, מצאו את הערך העצמי של המטריצה $A+kI$.

32) תהי A מטריצה ממשית מסדר 3×3. ידוע כי v_1,v_2 הם ו"ע של A, שונים מאפס, המתאימים לע"ע $\lambda=1$, וכי v_3 הוא ו"ע, שונה מאפס, המתאים לע"ע $\lambda=-1$.
הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות:

א. אם הווקטורים v_1,v_2 בת"ל, אז $A^{2018}=I$.

ב. A ניתנת ללכסון.

ג. v_3 הוא צרוף לינארי של הווקטורים v_1,v_2.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

33) הוכיחו או הפריכו:

א. כל מטריצה הניתנת ללכסון היא הפיכה.

ב. כל מטריצה הניתנת ללכסון היא לא הפיכה.

ג. כל מטריצה הפיכה ניתנת ללכסון.

ד. קיימת מטריצה A אשר הווקטור $\begin{pmatrix}4\\1\\10\end{pmatrix}$ הוא ו"ע שלה השייך לע"ע 14.

34) נתונות שתי מטריצות מסדר n: מטריצה B הניתנת ללכסון ומטריצה Q הפיכה. הוכיחו או הפריכו:

א. המטריצה $Q^{-1}BQ$ אלכסונית.

ב. המטריצה $Q^{-1}BQ$ ניתנת ללכסון.

35) נסמן ב- W את קבוצת כל המטריצות מסדר n, שעבורן v הוא ו"ע.

א. הוכיחו כי W תת מרחב של מרחב המטריצות מסדר n.

ב. עבור $v=\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$, $n=2$, מצאו בסיס ל- W.

36) תהי $A=\begin{pmatrix}1 & a\\4 & 1\end{pmatrix}$, כאשר a קבוע ממשי.

א. עבור $a=3$, תנו דוגמה לזוג $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ שאינו וקטור עצמי של A.

ב. עבור איזה ערך של a, הזוג $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ הוא וקטור עצמי של A?

ג. יהי $0\neq u\in\mathbb{R}^2$ וקטור שאינו ו"ע של A.
הוכיחו כי הקבוצה $\{u, Au\}$, מהווה בסיס של $\mathbb{R}^2$.

37) מטריצה ריבועית A תיקרא אידמפוטנטית, אם $A^2=A$.
תהי A מטריצה אידמפוטנטית.

א. הוכיחו כי הערכים העצמיים של A הם 0 או 1 בלבד.

ב. רשמו את כל האפשרויות עבור הפולינום המינימלי של A.

ג. הוכיחו כי הפולינום האופייני של A מתפרק לגורמים לינאריים.

ד. הוכיחו כי A ניתנת ללכסון.

ה. הוכיחו כי $\operatorname{tr}(A)=\operatorname{rank}(A)$ (סעיף זה דורש ידע בדימיון מטריצות).

כתב ופתר – גיא סלומון ©

38) תהי A מטריצה ממשית מסדר 5. הוכיחו או הפריכו:

א. קיים תת מרחב $W_\alpha=\{u\mid Au=\alpha u\}$ של R^5, כך ש- $\dim W_\alpha\geq 1$.

ב. אם u_1,u_2 ו״ע של A, אז גם הווקטור u_1+u_2 ו״ע של A.

ג. אם המטריצה B שקולת שורות למטריצה A, אז לשתי המטריצות אותם ערכים עצמיים.

ד. אם A לכסינה מעל R, אז כל הערכים העצמיים שלה שונים זה מזה.

ה. אם כל הערכים העצמיים של A שונים זה מזה, אז המטריצה A לכסינה מעל R.

39) תהי A מטריצה ממשית מסדר 4, שכל הערכים העצמיים שלה ממשיים.
ידוע שהערך העצמי הקטן ביותר של המטריצה הוא 2,
והערך העצמי הגדול ביותר של המטריצה הוא 4.
מכאן נובע ש:

א. $\operatorname{rank}(A)=4$

ב. A לכסינה.

ג. $\operatorname{tr}(A)>10$

ד. $|A|\leq 127$

ה. קיים וקטור עצמי v של A, כך ש- $A^2v=2v$.

40) תהי A מטריצה ריבועית ויהי n מספר טבעי.
הוכיחו או הפריכו:

א. אם v וקטור עצמי של A, אז v וקטור עצמי גם של A^n.

ב. אם v וקטור עצמי של A^n, אז v וקטור עצמי גם של A.

ג. אם A לכסינה, אז A^n לכסינה.

ד. אם A^n לכסינה, אז A לכסינה.

41) נתונה מטריצה A, שהפולינום המינימלי שלה הוא $m(x)=(x-1)^2$.
הוכיחו כי המטריצה $A^2+4A+3I$ הפיכה.

42) הוכיחו שהערכים העצמיים של מטריצה סימטרית ממשית הם בהכרח ממשיים.

43) נתונה מטריצה סימטרית ממשית A.
הוכיחו שווקטורים עצמיים של A המתאימים לערכים עצמיים שונים הם אורתוגונליים.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

44) תהי A מטריצה ממשית מסדר n.

נתון: (1) A ניתנת ללכסון. (2) קיים k טבעי כך ש- $A^k = I$.

צריך להוכיח: $A^2 = I$.

45) ענו על הסעיפים הבאים:

א. תהי A מטריצה מסדר $n\times n$, לכסינה ובעלת דרגה 1.
הוכיחו שהעקבה שלה שונה מ- 0.

ב. תהי A מטריצה ריבועית נילפוטנטית מסדר n.
הוכיחו ש- 0 ע"ע של A, ושהוא הע"ע היחיד שלה.

46) נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix}$.

א. הוכיחו ש- A לכסינה.

ב. האם המטריצה $B = 4A^{111} - 10A + 20I$ הפיכה?

47) תהי $A_{n\times n}$ מטריצה ריבועית ממשית שמקיימת $A^2 + I = 0$.

הוכיחו את הטענות בסעיפים א'-ד':

א. A הפיכה.

ב. A לא ניתנת לליכסון.

ג. A לא סימטרית.

ד. n זוגי.

ה. האם הטענה בסעיף ד' נשארת נכונה גם אם המטריצה A מרוכבת?

48) תהי A מטריצה מסדר n ויהי c קבוע.

ידוע ש- λ ע"ע של המטריצה A עם וקטור עצמי v.

א. הוכיחו כי $\lambda + c$ הוא ערך עצמי של המטריצה $A+cI$ עם וקטור עצמי v.

ב. הוכיחו שהריבוי האלגברי של הע"ע λ של המטריצה A שווה לריבוי האלגברי של הע"ע $\lambda + c$ של המטריצה $A+cI$.

ג. הוכיחו שהריבוי הגיאומטרי של הע"ע λ של המטריצה A שווה לריבוי הגיאומטרי של הע"ע $\lambda + c$ של המטריצה $A+cI$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

49) נתונה מטריצה A על ידי $a_{ij}=\begin{cases} b & i=j \\ a & i\neq j \end{cases}$ כאשר $1\le i,j\le n$.

חשבו את הערכים העצמיים ואת הווקטורים העצמיים של המטריצה A.
קבעו האם המטריצה ניתנת ללכסון, אם כן, לכסנו אותה.
בעזרת התוצאות שקיבלת חשבו גם את $|A|$.
הערה: ניתן לפתור ללא חישוב של הפולינום האופייני.

50) תהי A מטריצה ממשית מסדר n.
הוכיחו:

א. אם n אי-זוגי אז למטריצה לפחות ע"ע ממשי אחד.

ב. אם λ ע"ע של A אז גם הצמוד המרוכב שלו $\bar{\lambda}$ הוא ע"ע של A.

51) תהי A מטריצה מסדר n.
הוכיחו:

א. אם A ניתנת ללכסון ואם הערכים העצמיים שלה הם 1 או 1-אז $A^2=I$.

ב. אם כל הערכים העצמיים של A ממשיים וקטנים מ-1 אז $|I-A|>0$.

52) תהי A מטריצה אנטי-סימטרית ממשית.
הוכיחו שכל ערך עצמי של A הוא מספר מדומה.
תזכורת: מספר מדומה הוא מספר מהצורה bi כאשר b ממשי.

53) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הגדר את המושגים מטריצה צמודה, מטריצה נורמלית ומטריצה אוניטרית.
צטט משפט מפורסם הנוגע ללכסינות מטריצות נורמליות.

תהי A מטריצה אנטי-סימטרית ממשית.

ב. הוכיחו שהמטריצה A נורמלית.

ג. הוכיחו שהדרגה של A היא זוגית.

הערה: תרגיל זה מיועד רק למי שלמד מספרים מרוכבים.

54) סדרה (a_n) מוגדרת רקורסיבית על ידי: $a_0=a_1=1$ $a_n=5a_{n-1}-6a_{n-2}$.
מצאו ביטוי סגור עבור a_n (כלומר, נוסחה לא רקורסיבית).

55) סדרה (a_n) מוגדרת רקורסיבית על ידי: $a_0=a_1=2,\ a_2=4$ $a_n=2a_{n-1}+a_{n-2}-2a_{n-3}$.
מצאו ביטוי סגור עבור a_n (כלומר, נוסחה לא רקורסיבית).

כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

השאלות בנושא זה הן שאלות הוכחה.

לפתרונות מלאים היכנסו לאתר GooL.co.il.

1) שאלת הוכחה.

2) א. הערך העצמי הוא 260.

3) א.2. $|A|=4$

4) שאלת הוכחה.

5) שאלת הוכחה.

6) $D=diag(0,0,k)$

7) שאלת הוכחה.

8) א. $p(\lambda)=(\lambda-10)^2(\lambda-4)$

ב. ע"ע 4 עם ריבוי אלגברי וגיאומטרי 1. ע"ע 10 עם ריבוי אלגברי וגיאומטרי 2.

ג. $D=diag(10,10,4)$ ד. כן. ה. לא.

9) $\mathrm{diag}(-1,-1,2,2,3)$

10) 0 ו- $tr(A)$.

11) שאלת הוכחה.

12) $diag(2,-5,-5),\ diag(-5,2,-5),\ diag(-5,-5,2)$

13) $rank(A)=0,\ rank(B)=1,\ rank(C)=2$

14) $0,1,-1$

15) שאלת הוכחה.

16) ב. $\begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$

17) שאלת הוכחה.

18) א. $|A|=2$ ב. $tr(A^2)=25$ ג. $tr(A)=6$

19) א. $1,\ \frac{-1-\sqrt{3}i}{2},\ \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ ב. $a=0,\ b=1,\ c=0$

20) א. $p_{4A}(x)=x^2+4bx+16c$

21) א. 19 ב. 11

22) שאלת הוכחה.

23) $\mathrm{diag}(1,1,-3i,-8+9i)$

24) א. $|A|=-5$ ו- $tr(A)=0$ ב. $\mathrm{tr}(A-2I)=-3$

25) שאלת הוכחה.

26) ה. $(-1)^n=|B|$

27) $|A|=-384$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

28) $m_M(x)=(x-2)^2(x-7)$

29) א. $p_M(x)=(x-5)^2(x-6)(x-7)$

30) שאלת הוכחה.

31) ב. $4+k$

32) שאלת הוכחה.

33) שאלת הוכחה.

34) שאלת הוכחה.

35) ב. $B_W=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$

36) א. $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ ב. $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

37) ב. $p(x)=x,\ p(x)=x-1,\ p(x)=x(x-1)$

38) שאלת הוכחה.

39) שאלת הוכחה.

40) שאלת הוכחה.

41) שאלת הוכחה.

42) שאלת הוכחה.

43) שאלת הוכחה.

44) שאלת הוכחה.

45) שאלת הוכחה.

46) שאלת הוכחה.

47) שאלת הוכחה.

48) שאלת הוכחה.

49) $|A|=(b-a)^{n-1}\left[a(n-1)+b\right]$

50) שאלת הוכחה.

51) שאלת הוכחה.

52) שאלת הוכחה.

53) שאלת הוכחה.

54) $a_n=2^{n+1}-3^n$

55) $a_n=\frac{1}{3}\left(3+(-1)^n+2^{n+1}\right)$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

חקירת הלכסינות של מטריצה

שאלות

1) נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix}4&0&0\\1&k&0\\1&0&k\end{pmatrix}$, כאשר k קבוע ממשי.

א. לאיזה ערכים של k המטריצה לכסינה?

ב. במקרים בהם A לכסינה מצאו מטריצה אלכסונית הדומה ל-A.

2) נתון $A=\begin{pmatrix}4&0&0\\1&k&0\\1&1&k\end{pmatrix}$, כאשר k קבוע ממשי.

לאיזה ערכים של k (אם בכלל) המטריצה לכסינה?

3) נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&a^2\\1&a^2&0\end{pmatrix}$, כאשר $a\in\mathbb{R}$.

א. מצאו את כל ערכי a, כך ש-A לכסינה מעל $\mathbb{R}$.

ב. במקרה בו A לכסינה מצאו מטריצה אלכסונית הדומה לה.

4) נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix}m&1&1\\1&m&1\\1&1&m\end{pmatrix}$, כאשר $m\in\mathbb{R}$.

עבור אילו ערכים של m, המטריצה A לכסינה?
כאשר היא לכסינה, רשמו מטריצה אלכסונית הדומה לה.

5) נתון $A=\begin{pmatrix}k-2&2k&k+1\\k-1&-1&2\\-k&0&-6\end{pmatrix}$, כאשר k קבוע ממשי חיובי.

א. לאיזה ערך של הפרמטר k המספר 2 יהיה ערך עצמי של המטריצה A?
עבור ערך ה-k שמצאת בסעיף א:

ב. מצאו את הריבוי האלגברי והריבוי הגיאומטרי של הערך העצמי 2.

ג. הוכיחו שהמטריצה ניתנת ללכסון ומצאו מטריצה אלכסונית הדומה לה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

6) נתונה המטריצה הממשית $A=\begin{pmatrix} a & b & b \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & -8 & -5 \end{pmatrix}$.

א. מצאו את ערכי a ו- b עבורם הערכים העצמיים של A יהיו 1 ו-1- **בלבד**.

ב. עבור ערכי a ו- b שמצאתם בסעיף א' קבעו האם המטריצה לכסינה.

7) נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & a-2 \\ 1 & 1 & a-2 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, מעל $\mathbb{R}$.

א. מצאו את כל הערכים של a, עבורם A לכסינה.

ב. במקרים בהם A לכסינה מצאו מטריצה אלכסונית D הדומה ל-A.

8) נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix} a^2 & 0 & a \\ 0 & 2a & 0 \\ 0 & 0 & a+2 \end{pmatrix}$, כאשר $a\in\mathbb{R}$.

א. עבור כל ערך של a, מצאו את הערכים העצמיים של A.

ב. עבור אילו ערכי a, המטריצה A לכסינה?

בכל אחד מהמקרים, רשמו מטריצה אלכסונית הדומה ל-A.

9) נתונה המטריצה הבאה מעל $\mathbb{R}$: $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix}$,

כאשר a,b,c מספרים ממשיים המקיימים $a-b+c=-1$.

א. הוכיחו כי -1 הוא ערך עצמי של A ומצאו את הריבוי הגיאומטרי שלו.

ב. נתון כי $a=b>1$.

הוכיחו כי המטריצה ניתנת ללכסון ומצאו את כל ערכיה העצמיים.

ג. ידוע כי $\left(\frac{b-a}{2}\right)^2+a<0$.

הוכיחו שהמטריצה לא ניתנת ללכסון.

10) מצאו את כל הערכים של המספרים הממשיים a,b, כך שהמטריצה $A=\begin{pmatrix} a & 0 & b-a \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ לכסינה.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

11) נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

א. עבור אילו ערכי a,b A לכסינה? נמקו.

ב. בכל אחד מהמקרים ש-A לכסינה, רשמו מטריצה אלכסונית ש-A דומה לה.

12) נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & a & 0 & b \end{pmatrix}$, כאשר $a,b\in\mathbb{R}$.

מצאו את כל הערכים של a ו- b, כך ש-A לכסינה.
בכל מקרה בו היא לכסינה, רשמו מטריצה אלכסונית הדומה לה.

13) נתונה מטריצה ממשית $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & a \\ 3 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, כאשר a פרמטר ממשי.

ידוע ש-$\lambda=-2$ הוא ערך עצמי שלה, עם ריבוב גיאומטרי 2.

א. מהו ערכו של a?

ב. האם המטריצה לכסינה?

14) נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, כאשר $a\in\mathbb{R}$.

האם קיימים ערכי a, כך ש-A לכסינה מעל $\mathbb{R}$? מעל $\mathbb{C}$?
אם כן, עבור כל ערך כזה של a, רשמו מטריצה אלכסונית הדומה ל-A.

15) נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -a & 2a \\ a & -a & a \end{pmatrix}$, מעל $\mathbb{R}$.

מצאו את כל ערכי a עבורם A לכסינה:

א. מעל $\mathbb{R}$.

ב. מעל $\mathbb{C}$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) א. $k \neq 4$ ב. $D = diag(4,k,k)$

2) המטריצה A לא ניתנת ללכסון לכל ערך של k.

3) א. A לכסינה אם ורק אם $a \neq \pm 1$. ב. $D = diag\left(1,-a^2,a^2\right)$

4) A לכסינה לכל m ודומה למשל ל- $D = diag(m-1,m-1,m+2)$

5) א. $k=3$ ב. ר"א = 1. ר"ג = 1. ג. $D = diag(2,-3,-5)$

6) א. $a=3,\ b=-4$ או $a=1,\ b=0$ ב. המטריצה לא לכסינה.

7) א. A לכסינה עבור כל a. ב. דומה למטריצה אלכסונית $D = diag(a,1,2)$.

8) א. אם $a \neq 0,2,-1$, אז יש שלושה ע"ע שונים $a^2,2a,a+2$.

אם $a=0$, הע"ע הם 0 ו- 2.

אם $a=-1$, הע"ע הם 1 ו- -2.

אם $a=2$, יש ע"ע אחד והוא 4.

ב. A לכסינה אם ורק אם $a \neq 2,-1$.

במקרה זה היא דומה למטריצה $D = diag\left(a^2,2a,a+2\right)$.

9) שאלת הוכחה.

10) אם $a=b=0$, או אם $a \neq 0$ ו- $b=0$, אז A לכסינה.

11) א+ב. A לכסינה בשלושה מקרים:

כאשר $a \neq 0,1$ ואז דומה ל- $D = diag(1,0,a)$

או כאשר $a=0$ וגם $b=0$ ואז דומה ל- $D = diag(0,0,1)$

או כאשר $a=1$ וגם $b=-\frac{1}{2}$ ואז דומה ל- $D = diag(0,1,1)$

12) A לכסינה אם ורק אם:

1. $b \neq 2,3$ ואז $D = diag(3,2,2,b)$.

2. או $b=2$ וגם $a=0$ ואז $D = diag(3,2,2,2)$.

3. או $b=3$ וגם $a=0$ ואז $D = diag(3,3,2,2)$.

13) א. $a=3$ ב. כן.

14) מעל $\mathbb{R}$: לכסינה אם $a=0$ ודומה ל- $D = diag(0,0,0,0)$.

מעל $\mathbb{C}$: לכסינה לכל a דומה ל- $D = diag(a,-a,ai,-ai)$.

15) א. A לכסינה מעל $\mathbb{R}$ אם ורק אם $a=0$. ב. A לכסינה מעל $\mathbb{C}$ לכל a.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

דמיון מטריצות

שאלות

1) ידוע ש-A ו-B מטריצות דומות. הוכיחו כי:

א. $|A|=|B|$

ב. $\operatorname{tr}(A)=\operatorname{tr}(B)$

ג. ל-A ו-B אותו פולינום אופייני.

2) הוכיחו באינדוקציה: אם $P^{-1}AP=B$, אז $A^n=PB^nP^{-1}$.

3) ענו על הסעיפים הבאים:

א. ידוע כי A מטריצה ממשית מסדר n וידוע כי A דומה למטריצה $4A$. הוכיחו כי A מטריצה לא הפיכה.

ב. הוכיחו שהמטריצות $4A=\begin{pmatrix}0&4\\0&0\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ דומות.

4) נתונות שתי מטריצות ממשיות: $B=\begin{pmatrix}2&0&0\\-1&7&0\\9&-17&6\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}a&b&b\\-1&3&2\\2&-8&-5\end{pmatrix}$.

האם קיימים קבועים ממשיים a,b, כך שהמטריצה A דומה למטריצה B?

5) נתונות שלוש מטריצות ריבועיות מסדר n: A,B,C. הוכיחו כי:

א. A דומה לעצמה.

ב. אם A דומה ל-B, אז B דומה ל-A.

ג. אם A דומה ל-B ו-B דומה ל-C, אז A דומה ל-C.

ד. אם A דומה ל-B ושתיהן הפיכות, אז A^{-1} דומה ל-B^{-1}.

ה. אם A דומה ל-B, אז A^k דומה ל-B^k, לכל k טבעי.

ו. אם A דומה ל-B ו-$q(x)$ פולינום, אז $q(A)$ דומה ל-$q(B)$.

ז. אם A דומה ל-B, אז A^T דומה ל-B^T.

ח. אם A דומה ל-B, אז $\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(B)$.

ט. אם A דומה ל-B, אז $\operatorname{Nullity}(A)=\operatorname{Nullity}(B)$.

הערה – $\operatorname{Nullity}(A)$ = מימד מרחב הפתרונות של המערכת ההומוגנית $Ax=0$.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

6) הוכיחו או הפריכו:

א. אם לשתי מטריצות מסדר 3 אותו פולינום אופייני, הן דומות.

ב. אם לשתי מטריצות מסדר 3 אותו פולינום מינימלי, הן דומות.

ג. אם לשתי מטריצות אותו פולינום אופייני ואותו פולינום מינימלי, אז הן דומות.

ד. המטריצות הבאות דומות $B=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$ $A=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

7) ידוע שלמטריצה ריבועית A מסדר 3 יש ערכים עצמיים 0, 1 ו-2.
חשבו כל אחד מהבאים או הסבירו מדוע לא ניתן לעשות זאת:

א. $\operatorname{rank}(A)$

ב. $\dim \operatorname{Ker}(A)$

ג. $\operatorname{tr}(A)$

ד. $|A^T A|$

ה. ע"ע עבור $A^T A$.

ו. ע"ע עבור $(4A^2+10A+I)^{-1}$.

הערה – $\dim \operatorname{Ker}(A)=\operatorname{Nullity}(A)$

8) הוכיחו כי למטריצות דומות אותו פולינום מינימלי.

9) ענו על הסעיפים הבאים:

א. A ו-B שתי מטריצות הדומות למטריצה C.
הוכיחו כי A דומה ל-B.

ב. הוכיחו שהמטריצות הבאות דומות: $B=\begin{pmatrix}1&1\\4&4\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix}$.

10) עבור אילו ערכים של x המטריצות הבאות דומות:

$$A=\begin{pmatrix}3&0&-1\\-2&1&1\\2&0&0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&x&0\\0&1&0\\-1&x&2\end{pmatrix}$$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

11) הוכיחו שכל אחת מהמטריצות הבאות אינה דומה לאף אחת מהאחרות:

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}-1&0&1\\1&-1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$$

12) נתונות שתי מטריצות $A,B\in M_n[\mathbb{R}]$.

נתון כי A ניתנת ללכסון.

הוכיחו:

B דומה ל-A אם ורק אם B ניתנת ללכסון והיא בעלת אותם ע"ע כמו של A.

13) נתונות המטריצות $A=\begin{pmatrix}-2&0&0\\2&a&2\\3&1&1\end{pmatrix}$ ו- $B=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&b\end{pmatrix}$, כאשר $a,b\in\mathbb{R}$.

עבור אילו ערכים של a ו- b המטריצות A ו- B דומות?

14) נתונות המטריצות $A=\begin{pmatrix}1&0&a\\0&3&0\\a&0&1\end{pmatrix}$ ו- $B=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&-1&0\\0&0&3\end{pmatrix}$, כאשר $a\in\mathbb{R}$.

קבעו האם קיימת מטריצה הפיכה P כך ש- $P^{-1}AP=B$.

15) נתונות המטריצות $A=\begin{pmatrix}1&0&\dots&0&0\\0&2&\dots&0&0\\0&0&\dots&n-1&0\\0&0&\dots&0&n\end{pmatrix}$ ו- $B=\begin{pmatrix}n&0&\dots&0&0\\0&n-1&\dots&0&0\\0&0&\dots&2&0\\0&0&\dots&0&1\end{pmatrix}$.

קבעו האם המטריצות דומות. אם כן, מצאו מטריצה הפיכה P, כך ש- $P^{-1}AP=B$.

16) תהיינה A,B מטריצות ב- $M_n(\mathbb{R})$, בעלות דרגה 1, וכן $\operatorname{tr}(A)=\operatorname{tr}(B)=k$, כאשר k מספר ממשי שונה מ- 0.

א. מצאו את הפולינום האופייני של A ו- B.

ב. הוכיחו ש- A ו- B דומות.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

17) תהי A מטריצה מסדר 3×3 עם פולינום אופייני $p(t)=(t-1)(t+4)^2$, ונתון כי $\rho(4I+A)=1$.

א. רשמו את הפולינום האופייני של A^2 .

ב. הוכיחו שהמטריצה $A^4-10A+9I$ לא הפיכה, ומצאו את ממד מרחב הפתרונות של המערכת $\left(A^4-10A+9I\right)\underline{x}=\underline{0}$.

18) נתון כי $A,B,C,D\in M_n[\mathbb{R}]$ כך ש-A דומה ל-B ו-C דומה ל-D .
הוכיחו או הפריכו:

א. $A+C$ דומה ל-$B+D$.

ב. AC דומה ל-BD .

19) הוכיחו או הפריכו:

א. אם שתי מטריצות שקולות שורה אז הן דומות.

ב. אם שתי מטריצות הן דומות אז הן שקולות שורה.

20) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו: אם A דומה ל-B אז $A-kI$ דומה ל- $B-kI$.

ב. בדקו האם המטריצות הבאות דומות:

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

ג. בדקו האם המטריצות הבאות דומות:

$$A=\begin{pmatrix}1&1&5\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&7&0\\0&2&7\\0&0&2\end{pmatrix}$$

21) נתון כי A ו-B מטריצות דומות.
הוכיחו של-A ו-B אותם ערכים עצמיים עם ריבוי אלגברי וגיאומטרי זהה.

22) תהי A מטריצה ממשית מסדר 7×7 , בעלת דרגה 4 .
נתון שהפולינום $q(t)=t^4-7t^2+10$ מחלק את הפולינום האופייני $p(t)$ של A .
מצאו את הפולינום האופייני של A .

א. הוכיחו ש-A לכסינה ומצאו מטריצה אלכסונית שדומה לה.

ב. מצאו את $tr\left(A^2\right)$.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

23) נתונות שתי מטריצות $A,B\in M_n(R)$.
הוכיחו או הפריכו:
א. אם $B+I$ דומה ל- $I-A$ אז A^2 דומה ל- B^2 .
ב. אם ל- A ול- B אותה דרגה, אותו פולינום אופייני, אותה דטרמיננטה ואותו סכום איברי אלכסון (trace) אז הן בהכרח דומות.

תשובות סופיות

1) שאלת הוכחה.
2) שאלת הוכחה.
3) שאלת הוכחה.
4) לא.
5) שאלת הוכחה.
6) שאלת הוכחה.
7) א. 2 ב. 1 ג. 3 ד. 0 ה. לא ניתן לחשב. ו. $1, 1/15, 1/37$
8) שאלת הוכחה.
9) שאלת הוכחה.
10) $x=0$
11) שאלת הוכחה.
12) שאלת הוכחה.
13) $b=-2$ ו- $a=0$
14) כן, עבור $a=\pm 2$
15) המטריצות דומות ו- P מטריצה שהאלכסון המשני שלה 1 ושאר האיברים 0.
16) א. $p_A(t)=p_B(t)=t^n-kt^{n-1}$ ב. שאלת הוכחה.
17) א. $p(x)=(x-1)(x-16)^2$. ב. ממד מרחב הפתרונות הוא 1.
18) שאלת הוכחה.
19) שאלת הוכחה.
20) א. שאלת הוכחה. ב. לא דומות. ג. לא דומות.
21) שאלת הוכחה.
22) א. $D=diag\left(0,0,0,\sqrt{2},-\sqrt{2},\sqrt{5},-\sqrt{5}\right)$ ב. $tr\left(A^2\right)=14$
23) שאלת הוכחה.

כתב ופתר – גיא סלומון ©