אלגברה ליניארית

פרק 8 - ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים של מטריצה

תוכן העניינים

1. לכסון מטריצות - תרגילי חישוב 1

ערכים עצמיים, וקטורים עצמיים, לכסון

שאלות

עבור כל אחת מהמטריצות בשאלות **1-5** מצאו ערכים עצמיים ו-וקטורים עצמיים:

1) $A=\begin{pmatrix}4&-1&-1\\1&2&-1\\1&-1&2\end{pmatrix}$

2) $A=\begin{pmatrix}1&-1&4\\3&2&-1\\2&1&-1\end{pmatrix}$

3) $A=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&2&1\\2&1&1\end{pmatrix}$

4) $A=\begin{pmatrix}1&1\\4&1\end{pmatrix}$

5) $A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}$

6) תהי A מטריצה ממשית ריבועית מסדר 3×3.

ידוע כי הווקטורים העצמיים של המטריצה הם $v_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, v_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, v_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$,

והם מתאימים לערכים העצמיים: $\lambda_1=6, \lambda_2=2, \lambda_3=-4$.

מצאו את המטריצה A.

7) קבעו האם קיימת מטריצה ממשית ריבועית מסדר 3×3,

בעלת וקטורים עצמיים $v_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, v_2=\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}, v_3=\begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix}$,

המתאימים לערכים העצמיים: $\lambda_1=1, \lambda_2=2, \lambda_3=3$.

במידה וקיימת מטריצה כזאת, מצאו אותה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

8) נתונה מטריצה ריבועית A.
הוכיחו או הפריכו:

א. 0 ערך עצמי של המטריצה A, אם ורק אם המטריצה איננה הפיכה.

ב. אם A הפיכה ו-λ ע"ע של A, אז $\frac{1}{\lambda}$ הוא ערך עצמי של A^{-1}.

ג. ל-A ול-A^T יש את אותו פולינום אופייני.

ד. ל-A ול-A^T יש את אותם וקטורים עצמיים.

ה. אם סכום האיברים בכל שורה של A הוא λ, אז λ הוא ע"ע של A.

ו. אם $A^{-1}=A^T$ ואם λ הוא ע"ע של A, אז $\lambda=\pm 1$.

ז. אם $A^2=A$ ואם λ הוא ע"ע של A, אז $\lambda=0$ או $\lambda=1$.

תשובות סופיות

1) ערכים עצמיים: $x_1=2,\ x_{2,3}=3$,

וקטורים עצמיים: $V_{x=2}=(1,1,1),\ v^{(2)}_{x=3}=(1,1,0),\ v^{(1)}_{x=3}=(1,0,1)$

2) $x=1,\ x=3,\ x=-2$, $v_{x=1}=(-1,4,1)$, $v_{x=3}=(1,2,1)$, $v_{x=-2}=(-1,1,1)$

3) $x=1,\ x=4,\ x=-1$, $v_{x=1}=(1,-2,1)$, $v_{x=4}=(1,1,1)$, $v_{x=-1}=(-1,0,1)$

4) $x=-1,\ x=3$, $v_{x=1}=(-1,2)$, $v_{x=3}=(1,2)$

5) $x=1, x=1\pm\sqrt{3i}$, $\boldsymbol{v}_{x=1}=\langle 1,1,1\rangle$, $\boldsymbol{v}_{x=1+\sqrt{3i}}=\left(1-\sqrt{3i},1+\sqrt{3i},-2\right)$,

$\boldsymbol{v}_{x=1-\sqrt{3i}}=\left(1+\sqrt{3i},1-\sqrt{3i},-2\right)$

6) $A=\begin{bmatrix}-1 & 3 & 0\\ 3 & -1 & 0\\ -2 & -2 & 6\end{bmatrix}$

7) אין כזו מטריצה.

8) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה. ג. שאלת הוכחה. ד. הפרכה.

ה. שאלת הוכחה. ו. שאלת הוכחה. ז. שאלת הוכחה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©