

# אלגברה לינארית 2 (חלקי מאוד)

פרק 2 - ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים של אופרטורים לינאריים

תוכן העניינים

1. ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים של העתקה.....1

## ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים של העתקה

### שאלות

(1) נתונה העתקה לינארית,  $T: M_2[R] \rightarrow M_2[R]$ ,  $T(X) = PX$  ; כאשר  $P$  מטריצה לא ידועה מסדר 2.

נסמן ב- $W$  את קבוצת כל המטריצות  $P$ , שעבורן המטריצה  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  היא וקטור עצמי של ההעתקה.  
 א. מצאו את  $W$ .  
 ב. הוכיחו כי  $W$  היא תת-מרחב של  $M_2[R]$ , ומצאו לה בסיס.

(2) נתונה העתקה לינארית,  $T: M_{10}[R] \rightarrow M_{10}[R]$ ,  $T(X) = PX$  ; כאשר  $P$  מטריצה לא ידועה מסדר 10.  
 ידוע כי  $A$  היא מטריצה הפיכה, שמהווה וקטור עצמי של ההעתקה – המתאים לערך העצמי 4.  
 חשבו את  $|P|$ .

(3) מצאו העתקה לינארית  $T$ , שעבורה המטריצה  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ , היא וקטור עצמי המתאים לערך העצמי 4.

(4) ענו על הסעיפים הבאים:  
 א. נתונה העתקה לינארית  $T(x, y, z) = (4x - y - z, x + 2y - z, x - y + 2z)$ . מצאו ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים של ההעתקה. האם ההעתקה ניתנת ללכסון?  
 ב. נתונה העתקה לינארית:  $T: R^3 \rightarrow R^3$ ,  $T(x, y, z) = (x + y, y + z, z - x)$ . מצאו ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים עבור ההעתקה. האם ההעתקה ניתנת ללכסון?

(5) נתונה העתקה לינארית  $T(x, y, z) = (x + z, y, x + z)$ .  
 א. מצאו ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים של ההעתקה.  
 ב. האם ההעתקה ניתנת ללכסון?  
 ג. במידה וכן, חשבו  $T^{2009}(x, y, z)$ .

6 נתונה העתקה לינארית:

$$T \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} ; T: M_2[R] \rightarrow M_2[R]$$

- א. מצאו את המטריצה המייצגת את ההעתקה בבסיס הסטנדרטי.
- ב. מצאו ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים של ההעתקה.
- ג. האם ההעתקה ניתנת ללכסון?
- ד. במידה והתשובה לסעיף ג' חיובית, חשבו את  $T^{10} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ .

7 נתונה העתקה לינארית:  $T: P_2[R] \rightarrow P_2[R]$  ;  $T(p(x)) = p(x+1)$

- א. מצאו את המטריצה המייצגת את ההעתקה בבסיס הסטנדרטי.
- ב. מצאו ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים של ההעתקה.
- ג. האם ההעתקה ניתנת ללכסון?

8 יהי  $V$  מרחב וקטורי מממד  $n$ .

תהי  $T: V \rightarrow V$  העתקה לינארית.

- א. הוכיחו ש- $T$  הפיכה אמ"ם כל הערכים העצמיים של  $T$  שונים מאפס.
- ב. הוכיחו כי אם  $T$  הפיכה, אז ל- $T$  ול- $T^{-1}$  יש את אותם וקטורים עצמיים. מה ניתן לומר על הקשר בין הערכים העצמיים של  $T$  ושל  $T^{-1}$ ?

## תשובות סופיות

$$(1) \quad W = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \mid \lambda \in R \right\} \quad \text{א.} \quad B_W = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{ב.}$$

$$(2) \quad 4^{10} = |P|$$

$$(3) \quad T(X) = 4X \quad T: M_{2 \times 3}(R) \rightarrow M_{2 \times 3}(R)$$

$$(4) \quad \text{א.} \quad v_{\lambda=2} = (1, 1, 1), \quad v_{\lambda=3}^{(1)} = (1, 1, 0), \quad v_{\lambda=3}^{(2)} = (1, 0, 1).$$

$$\text{ב. ערך עצמי: } x=0, \text{ וקטור עצמי: } v_{x=0} = (1, -1, 1). \text{ לא.}$$

$$(5) \quad \text{ב. ניתנת ללכסון.} \quad v_{\lambda=0} = (-1, 0, 1), \quad v_{\lambda=1} = (0, 1, 0), \quad v_{\lambda=2} = (1, 0, 1)$$

$$\text{ג.} \quad T^{2009}(x, y, z) = (2^{2008}x + 2^{2008}z, y, 2^{2008}x + 2^{2008}z)$$

$$(6) \quad [T]_E = A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{א.}$$

$$\text{ב.} \quad v_{x=0}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad v_{x=0}^{(2)} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad v_{x=2}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad v_{x=2}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{ג. כן. ד.} \quad T^{10} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^9 x + 2^9 z & 2^9 y + 2^9 t \\ 2^9 x + 2^9 z & 2^9 y + 2^9 t \end{pmatrix}$$

$$(7) \quad \text{א.} \quad [T]_E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ב.} \quad v_{\lambda=1} = 1 \quad \text{ג. לא ניתנת ללכסון.}$$

(8) שאלת הוכחה.