

רענון במתמטיקה מספר 500-5-0010

פרק 8 - עצרת, הבינום של ניוטון ומשולש פסקל

תוכן העניינים

1. כללי 1

הבינום של ניוטון:

סיכום כללי:

מושג העצרת:

מסמנים: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ כאשר n מספר טבעי.
מגדירים: $0! = 1$.

המקדם הבינומי:

הביטוי $\binom{n}{k}$ נקרא המקדם הבינומי ומוגדר ע"י: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ לכל n, k טבעיים
כאשר $0 \leq k \leq n$.

הבינום של ניוטון:

נוסחת הבינום של ניוטון ניתנת לכתיבה באופן הבא: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$
לכל n טבעי.

ניתן לחשב את האיבר העומד במקום ה- k ע"י: $T_k = \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^{k-1}$.

משולש פסקל:

משולש מספרים שבו כל מספר בשורה מסוימת
שווה לסכום המספרים שבשורה שמעליו
באופן המתואר:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 1 & & 1 & & \\
 & 1 & & 2 & & 1 & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \\
 & \ddots & & & & \vdots & & & & \ddots & & & &
 \end{array}$$

שאלות:

(1) חשב, ללא מחשבון:

א. $\frac{4! \cdot 7!}{0! \cdot 10!}$

ב. $\frac{14! \cdot 20!}{10! \cdot 17!}$

(2) הוכח את הזהויות הבאות:

א. $(n-2)!(n^2-n) = n!$

ב. $(n-1)!n^2 + n! = (n+1)!$

ג. $\frac{1}{(n-1)!} = \frac{(n+2)^2}{(n+2)!} + \frac{n^2-2}{(n+1)!}$

(3) חשב:

ד. $\binom{14}{11}$

ה. $\binom{10}{0}$

ו. $\binom{4}{1}$

ז. $\binom{5}{3}$

(4) הוכח את הזהויות הבאות:

א. $\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$

ב. $\frac{k}{n} \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1}$

ג. $\frac{n+1}{k+1} \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$

(5) הוכח באינדוקציה שלכל $n \geq 2$ טבעי מתקיים: $\binom{1}{0} + \binom{2}{1} + \binom{3}{2} + \dots + \binom{n-1}{n-2} = \binom{n}{2}$

(6) רשום את פיתוח הבינום בכל אחד מהסעיפים הבאים:

א. $(a+b)^4$

ב. $(x+2)^5$

ג. $(x-4)^3$

(7) ענה על הסעיפים הבאים :

א. הוכח $\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$ לכל $k, n \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq n$.

ב. נסח והוכח (באינדוקציה) את נוסחת הבינום.

(8) הוכח שלכל $n \geq 1$ טבעי מתקיים :

א. $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$.

ב. $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \dots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0$.

ג. $\binom{n}{0} + 3\binom{n}{1} + 9\binom{n}{2} - \dots + 3^n \binom{n}{n} = 4^n$.

(9) מצא את האיבר הרביעי בפיתוח הבינום $\left(\frac{1}{2a} + 2a^2\right)^{10}$.

(10) בפיתוח של $\left(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt{a}\right)^{12}$, ישנו איבר שאחד מגורמיו הוא a^7 . מצא את מקום האיבר ואת ערכו.

(11) מצא, בפיתוח של $\left(\frac{1}{x^2} + \sqrt{x}\right)^{10}$, איבר שאינו מכיל את x , וחשב את ערכו.

(12) ענה על הסעיפים הבאים :

א. מצא, בפיתוח של $\left(\frac{\sqrt[3]{x}}{a} + \frac{b}{\sqrt[4]{x}}\right)^{18}$, את המקדם של $\frac{1}{x}$.

ב. חשב את סכום כל המקדמים בפיתוח, אם $a = b = 1$.

(13) המקדם של האיבר השלישי בפיתוח הבינום $(a+b)^n$, הוא 15. מצא את n .

תשובות סופיות:

$$(1) \quad \text{א. } \frac{1}{30} \quad \text{ב. } \frac{1001}{285}$$

(2) הוכחה.

$$(3) \quad \text{א. } 10 \quad \text{ב. } 4 \quad \text{ג. } 1 \quad \text{ד. } 364$$

(4) הוכחה.

(5) הוכחה.

$$(6) \quad \text{א. } (a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$\text{ב. } (x+2)^5 = x^5 + 10x^4 + 40x^3 + 80x^2 + 80x + 32$$

$$\text{ג. } (x-4)^3 = x^3 - 12x^2 + 48x - 64$$

(7) הוכחה.

(8) הוכחה.

$$(9) \quad T_4 = \frac{15}{2a}$$

$$(10) \quad T_7 = 924a^7$$

$$(11) \quad T_9 = 45$$

$$(12) \quad \text{א. } \frac{18564 \cdot b^{12}}{a^6} \quad \text{ב. } 2^{18}$$

$$(13) \quad n = 6$$