פיזיקה למתמטיקאים 8832001

פרק 5 - עבודה ואנרגיה -החומר מופיע בקצרה בסיכומים

תוכן העניינים

1. שימור אנרגיה ומשפט עבודה ואנרגיה 1
2. חישוב עבודה לכוח לא קבוע 5
3. חישוב כוח משמר מאנרגיה פוטנציאלית 7
4. איך בודקים האם כוח הוא משמר 8
5. נקודת שיווי משקל 9
6. ניתוח באמצעות גרפים של אנרגיות 11
7. חישוב אנרגיה פוטנציאלית מכוח משמר 13
8. תרגילים מסכמים 14
9. תרגילים מסכמים כולל תנועה מעגלית 18

שימור אנרגיה ומשפט עבודה ואנרגיה

רקע

עבודה של כוח קבוע :

$$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = \left|\vec{F}\right| \cdot |\Delta\vec{r}| \cdot \cos\alpha = F_x\Delta x + F_y\Delta y + F_z\Delta z$$

כאשר α היא הזווית בין הכוח להעתק

הערות :

1. העבודה של כוח שמאונך להעתק (לתנועה) מתאפסת.
2. אם הגוף לא זז אז אין עבודה (לכן העבודה של החיכוך הסטטי היא תמיד אפס).

הקשר בין עבודה כוללת לאנרגיה קינטית :

$W_{\Sigma F} = \Delta E_k$ העבודה של **כל הכוחות** שפועלים על הגוף

$E_k = \frac{1}{2}mv^2$ אנרגיה קינטית

כוח משמר :

1. **העבודה שמבצע הכוח אינה תלויה במסלול**. היא תלויה רק בנקודה בה התחיל הגוף ובנקודה בה סיים הגוף את התנועה.
2. העבודה במסלול סגור מתאפסת.
3. יש לו אנרגיה פוטנציאלית $W_c = -\Delta U$

האנרגיה הפוטנציאלית הכובדית $U_g = mgh$

האנרגיה הפוטנציאלית האלסטית $U_{el} = \frac{1}{2}kx^2$

כאשר x הוא ההתארכות של הקפיץ ממצב רפוי ו-k הוא קבוע הקפיץ

אנרגיה (מכאנית) כללית : $E = E_k + U$

U היא סכום כל האנרגיות הפוטנציאליות שקיימות בבעיה.

משפט עבודה אנרגיה: $E_i + W_{NC} = E_F$

W_{NC} העבודה של הכוחות הלא משמרים

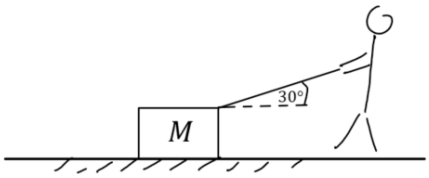
חוק שימור האנרגיה:

אם כל הכוחות משמרים (או העבודה של הכוחות הלא משמרים שווה לאפס) אז האנרגיה הכללית נשמרת

שאלות

1) אדם מושך ארגז

אדם מושך ארגז שמסתו $M = 5kg$ באמצעות חבל ובזווית 30 מעלות ביחס לקרקע.
מקדם החיכוך הקינטי בין הארגז לקרקע הוא: $\mu_k = 0.2$.
האדם מושך את הארגז לאורך שני מטרים. הכוח שמפעיל האדם הוא $80N$.



א. מהי העבודה שביצע האדם?
ב. מהי העבודה שביצע כוח החיכוך?
ג. מהן העבודות שביצעו כוח הכובד והנורמל מהמשטח?
ד. מהי העבודה הכוללת שנעשתה על הארגז?

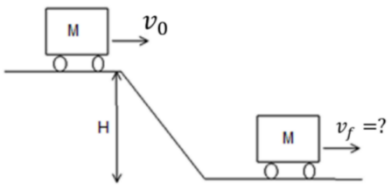
2) מהירות הארגז

בדוגמה הקודמת, אדם מושך ארגז, חשב את מהירות הארגז לאחר שהאדם משך אותו 2 מטרים אם ידוע שהוא התחיל ממנוחה.

3) חישוב עבודה של כוח הכובד

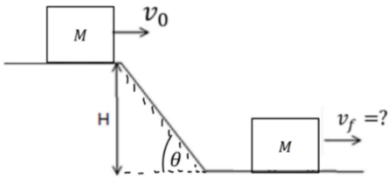
אבן בעלת מסה $2kg$ נופלת מגג בניין בגובה 10 מטרים.
חשבו את העבודה שביצע כוח הכובד על האבן עד הפגיעה בקרקע.
חשבו פעם אחת באופן מפורש דרך המכפלה הסקלרית ופעם נוספת דרך האנרגיה הפוטנציאלית.

4) עגלה במדרון



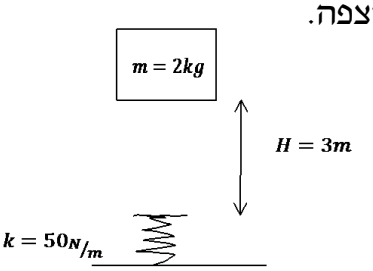
עגלה נעה על משטח ללא חיכוך.
העגלה מתחילה במעלה המדרון בגובה H
עם מהירות התחלתית v_0.
מצא את מהירות העגלה בתחתית המדרון.
נתונים: H , v_0.

5) קופסה במדרון עם חיכוך



קופסה יורדת במדרון משופע בעל זווית θ.
הנח כי מהירות הקופסה במעלה המדרון היא v_0
וגובהה ההתחלתי הוא H.
מצא את מהירות העגלה בתחתית המדרון.
הנח שהחיכוך הוא רק על החלק המשופע של התנועה.
נתונים: H , $\theta\mu_k$, v_0.

6) מסה נופלת על קפיץ

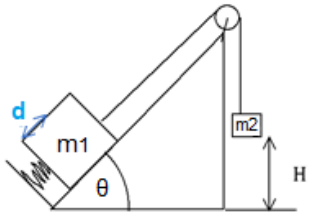


קפיץ חסר מסה, בעל קבוע קפיץ של $50\frac{N}{m}$, מחובר לרצפה.
משחררים ממנוחה מסה של $m = 2kg$ הנמצאת בגובה 3 מטר מעל הקפיץ.

א. מצא את הכיווץ המקסימאלי של הקפיץ.

ב. מה הגובה המקסימאלי אליו תגיע המסה לאחר הפגיעה בקפיץ.

7) שתי מסות מחוברות, מדרון וקפיץ



מסה m_1 נמצאת על מדרון משופע בזווית θ.
המסה מונחת על קפיץ בעל קבוע קפיץ k המכווץ ב- $\Delta x = d$.
אל המסה קשור חוט העובר דרך גלגלת אידיאלית ומחובר למסה m_2 הנמצאת בגובה H מעל הרצפה.
המערכת משוחררת ממנוחה.
מצא את מהירות הפגיעה בקרקע של m_2.
נתון:

$m_1 = 1kg$, $m_2 = 2kg$

$H = 3m$, $k = 100\frac{N}{m}$

$\theta = 30^\circ$, $d = 30cm$

תשובות סופיות

1) א. $W=139J$ ב. $W_{fk}=-4J$ ג. $W_N=W_g=0$ ד. $W_T=135J$

2) $V_F\approx 7.35\frac{m}{sec}$

3) $W_C=\left|\vec{F}\right|\cdot\left|\Delta\vec{r}\right|\cos\alpha=200J$, $W_C=-\Delta U=-\left(U_F-U_i\right)=200J$

4) $V_F=\sqrt{v_0^{\,2}+2gH}$

5) $V_F=\sqrt{v_0^{\,2}+2gH\left(1-\mu_k\cot\left(\theta\right)\right)}$

6) א. $\Delta x=2m$ ב. $mgH=mgh$

7) $V=5.745\frac{m}{sec}$

חישוב עבודה לכוח לא קבוע

רקע

$$W=\int \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}=\int \left(F_x\,\mathrm{d}x+F_y\,\mathrm{d}y+F_z\,\mathrm{d}z\right)$$

צריך גם משוואה של המסלול

שאלות

1) חישוב עבודה במסלולים שונים

חשב את העבודה שמבצע הכוח: $\vec{F}=xx+yxy$ בין הנקודה $A(0,0)$ לנקודה $B(2,4)$:

א. דרך המסלול של הקו הישר המחבר בין הנקודות.

ב. דרך מסלול המקביל לציר ה-x עד לנקודה $C(2,0)$ ולאחר מכן דרך המסלול המקביל לציר ה-y עד לנקודה B.

ג. דרך המסלול $y=x^2$.

ד. דרך המסלול $x(t)=2t,\ y(t)=4t^2$.

2) כוח בשלושה מימדים

נתון הכוח: $\vec{F}=zx^2\hat{x}+xz\hat{y}+2y\hat{z}$.

א. חשב את העבודה של הכוח דרך המסלול היוצא מהנקודה $A(1,2,3)$ עד לנקודה $B(2,3,5)$ כאשר המסלול יוצא מ-A במקביל לציר ה-Y ועד לנקודה $C(1,3,3)$ ולאחר מכן מ-C במקביל לציר ה-Z ועד לנקודה $D(1,3,5)$ ולאחר מכן מהנקודה D במקביל לציר ה-X עד לנקודה B.

ב. חשב את העבודה של הכוח מהנקודה $A(0,0,-1)$ עד הנקודה $B(4,4,5)$ לאורך המסלול הנתון לפי המשוואות: $z(t)=3t-1\ ;\ y(t)=t^2\ ;\ x(t)=2t$.

תשובות סופיות

1) א. $W_{A\to B}=\frac{4}{2}+\frac{4\cdot 8}{3}$ ב. $W_{A\to B}=18$ ג. $W_{A\to B}=2+\frac{64}{5}$

ד. $W_{A\to B}=2+\frac{64}{5}$

2) א. 26.67J ב. 128J

חישוב כוח משמר מאנרגיה פוטנציאלית

רקע

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} \cdot U$$

שאלות

1) חישוב עבודה מתוך אנרגיה פוטנציאלית

על גוף מסוים פועל כוח משמר המתאים לאנרגיה הפוטנציאלית הבאה: $U(x,y) = 2x^2 - 6y^3$.

מצא את העבודה אותה צריך לבצע על מנת להביא את הגוף מהנקודה $(1,0)$ אל הנקודה $(2,3)$.

תשובות סופיות

1) $W_{ext} = 156J$

איך בודקים האם כוח הוא משמר

רקע

אם ורק אם $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$, אז הכוח משמר.

הערה: צריך שכל רכיב יתאפס בנפרד

שאלות

1) דוגמה

נתון הכוח F: $\vec{F} = -2xyx + \left(x^2 - z\right)y + y\hat{z}$.

בדקו האם הכוח F משמר.

תשובות סופיות

1) משמר.

נקודת שיווי משקל:

רקע

נקודת שיווי משקל $\Sigma\vec{F}=0$ או $\frac{\partial U}{\partial x}=0$

שיווי משקל יציב - $U_x''>0$

שיווי משקל רופף - $U_x''<0$

שיווי משקל אדיש - אנרגיה קבועה

אם יש כמה ממדים אז $\vec{\nabla}U=0$

שיווי משקל יציב - כל הנגזרות השניות גדולות מאפס

שיווי משקל רופף - כל הנגזרות השניות קטנות מאפס

אוכף - חלק מהנגזרות השניות גדול מאפס וחלק קטן מאפס

שאלות:

1) שעון תלוי

שעון קיר תלוי באמצעות מסמר הנמצא בקצהו העליון.
ניתן לסובב את כל השעון (לא את המחוגים) סביב המסמר.

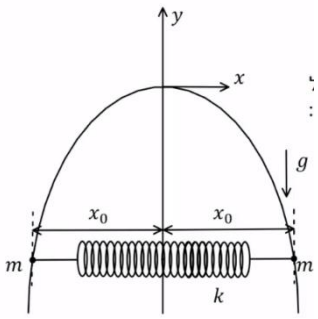
א. מצאו באילו מצבים השעון יהיה בשיווי משקל וקבעו עבור כל מצב איזה סוג שיווי משקל הוא.

ב. חזרו על סעיף א' אם המסמר תקוע במרכז השעון (השעון עדיין יכול להסתובב סביב המסמר).

2) אנרגיה פוטנציאלית בשיווי משקל

האנרגיה הפוטנציאלית של הגוף נתונה לפי הפונקציה הבאה: $U=(x-4)^2+x^3$.
מצאו את נקודת שיווי המשקל ומיינו אותה לסוגים הרלוונטיים.

3) קפיץ וחרוזים על תיל קשיח מכופף



תיל קשיח מכופף בצורת פרבולה המתאימה
לפונקציה: $y=-Ax^2$ כאשר A קבוע נתון.
על התיל מושחלים שני חרוזים זהים בעלי מסה m, אחד בכל צד.
קפיץ אופקי בעל קבוע k ואורך רפוי l מחבר בין החרוזים (ראה איור).
חשבו את המרחק האופקי x_0 של כל חרוז מציר ה-y במצב של שיווי משקל.
הניחו כי הקפיץ והחרוזים נמצאים תמיד באותו הגובה.
הדרכה: כתבו ביטוי לאנרגיה הפוטנציאלית כפונקציה של x בלבד.

תשובות סופיות:

1) א. כשהשען למטה שיווי משקל יציב וכשהשען הפוך ב-$180°$ שיווי משקל רופף. ב. השען בשיווי משקל אדיש.

2) $U''(x_1)=6\cdot\frac{4}{3}+2>0$, x_1 נק' מינימום $\Leftarrow$ ש.מ. יציב.

$U''(x_2)=-2\cdot 6+2<0$, x_2 נק' מקסימום $\Leftarrow$ ש.מ. רופף.

3) $x_0=\frac{kl}{2k-2mgA}$

ניתוח באמצעות גרפים של אנרגיות:

שאלות:

1) נקודה הכי ימנית

גוף שמסתו 6 ק"ג נע לאורך ציר x בהשפעת כוח יחיד הנגזר מהאנרגיה הפוטנציאלית: $U(x)=2x^4-36x^2$.

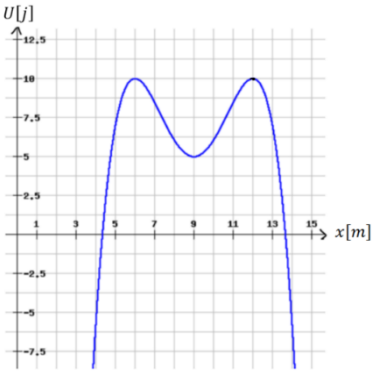
נתון שכאשר הגוף מגיע לנקודה בה $x=-1.5\text{m}$ מהירותו שווה ל- $v=3\frac{\text{m}}{\text{sec}}$.

א. מהי הנקודה הימנית ביותר במסלול של הגוף?

ב. חזור על סעיף א', אם ערך המהירות היה: $v=3\frac{\text{m}}{\text{sec}}$.

2) גמל דו דבשתי

כוח משמר פועל על כדור בעל מסה 625gr. הגרף הבא מתאר את האנרגיה הפוטנציאלית של הכדור כתלות במיקומו:



א. שרטטו באופן איכותי את הגרף של הכוח כתלות במיקום.

ב. תארו באופן מילולי את תנועת הכדור אם הוא משוחרר מ- $x=7\text{m}$ ממנוחה.

ג. מהי המהירות המינימלית שצריך לתת לכדור במצב של סעיף ב' על מנת שהכדור יגיע לאינסוף?

ד. מהן נקודות שיווי המשקל?

מיינו אותן לפי יציבותן וציינו מה המשמעות של כל סוג של שיווי משקל.

3) שני גופים בפוטנציאל אקספונציאלי ריבועי

שני גופים נמצאים על ציר ה- x ונתונים להשפעת הפוטנציאל: $U(x)=Axe^{-Bx^2}$

כאשר A , B הם קבועים חיוביים. נתון כי ברגע מסוים גוף אחד נמצא ב- $x=0$ והאנרגיה שלו היא אפס, והגוף השני נמצא ב- $x=-\sqrt{\frac{1}{B}}$ והאנרגיה שלו היא: $E=-\frac{A}{e}\sqrt{\frac{1}{B}}$. היכן ייפגשו הגופים? (בחר את התשובה הנכונה):

א. בתחום $-\sqrt{\frac{1}{B}}\le x\le 0$.

ב. הגופים לא ייפגשו אף פעם

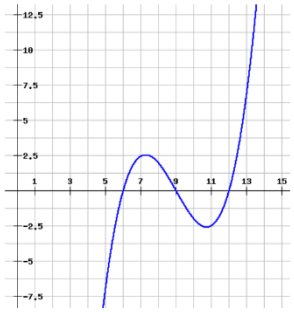
ג. בנקודה $x=-\sqrt{\frac{1}{B}}$.

ד. ב- $x=0$.

תשובות סופיות:

1) א. $x=-1.202\text{m}$ ב. $x=6.81\text{m}$

2) א.



ב. מתחיל בתאוצה בכיוון החיובי עד $x=9\text{m}$ ואז מתחיל להאט עד $x=11\text{m}$ שם עוצר רגעית ומסתובב חזרה. כך חוזר עד אינסוף.

ג. 2 מטר לשנייה.

ד. $x=6\text{m}$ לא יציבה , $x=9\text{m}$ יציבה , $x=12\text{m}$ לא יציבה.

3) א'.

חישוב אנרגיה פוטנציאלית מכוח משמר:

שאלות:

1) דוגמה

מצא את האנרגיה הפוטנציאלית של הכוח: $\vec{F}=-2xyx+\left(2-x^2\right)y$

אם נתון ש: $U(0,0)=0$.

2) תרגיל - חישוב אנרגיה פוטנציאלית תלת מימדית

נתון הכוח הבא:

$$\vec{F}(x,y,z)=A(y^2\hat{x}+(2xy+z^2)\hat{y}+2yz\hat{z})$$

כאשר A קבוע.

א. הראו כי הכוח משמר.

ב. חשבו את פונקציית האנרגיה הפוטנציאלית אם נתון שהאנרגיה מתאפסת בראשית.

תשובות:

1) $U=x^2y-2y$

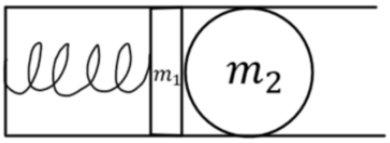
2) א. הוכחה בסרטון. ב. $U(x,y,z)=-A\left(y^2x+z^2y\right)$

תרגילים מסכמים:

שאלות:

1) קפיץ יורה כדור

הלוע של רובה צעצוע מורכב מקפיץ בעל קבוע k ובוכנה בעלת מסה m_1.
בטעינה דוחפים כדור בעל מסה m_2 ודורכים את הקפיץ.
הכיווץ של הקפיץ הוא d.
ברגע הירי הקפיץ משוחרר ממנוחה.



א. באיזה רגע הכדור מנתק מגע מהבוכנה?

ב. מהי מהירות הכדור ברגע הזה?

2) כוח כפונקציה של מיקום, קפיץ וחיכוך*

מסה m נמצאת על מישור אופקי לא חלק ומחוברת לקפיץ בעל קבוע k.
החל מ- $t=0$ פועל על המסה כוח התלוי במיקום: $\vec{F}(x)=\left(30x^2-4x\right)\hat{x}$.
כל היחידות בשאלה הן יחידות סטנדרטיות.
ב- $t=0$ המסה נמצאת בראשית עם מהירות התחלתית v_0 והקפיץ רפוי.

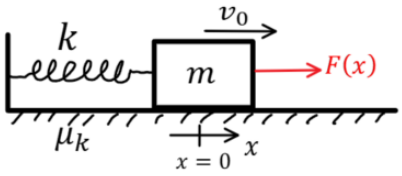
נתונים: $m=2kg$, $k=10\frac{N}{m}$, $\mu_k=0.3$, $v_0=5\frac{m}{sec}$.

א. רשמו ביטוי לתאוצת המסה כתלות במיקום $a(x)$, הנח כי התנועה תמיד בכיוון החיובי.

ב. מצאו את המיקום בו התאוצה של המסה מתאפסת.

ג. מהי העבודה שביצע הכוח מתחילת התנועה ועד אשר $x=0.5m$?

ד. מהי המהירות של המסה כאשר מיקומה $x=0.5m$?



3) כוח כפונקציה של זמן במישור משופע*

מסה $m=5kg$ נמצאת על מישור משופע לא חלק.

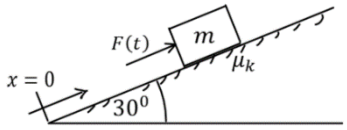
על המסה פועל כוח התלוי בזמן $F(t)$ שדוחף אותה במעלה המישור.

מהירות המסה ידועה והיא נתונה לפי הפונקציה: $v(t)=3t^2+2t$.

מקדם החיכוך הוא: $\mu_k=0.2$ ונתון כי: $x(t=0)=0$.

כל היחידות הן יחידות סטנדרטיות.

זווית המישור היא 30 מעלות.



א. (1) היכן נמצא הגוף ב-$t=2\sec$?

(2) מהו גודל הכוח F ברגע זה?

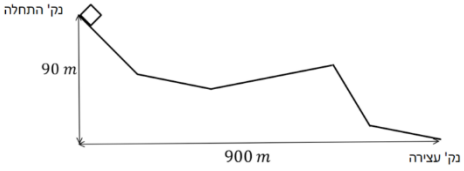
ב. מהו מיקום הגוף כאשר תאוצתו היא: $8\frac{m}{sec^2}$?

ג. מהי האנרגיה הקינטית של הגוף ברגע של סעיף ב'?

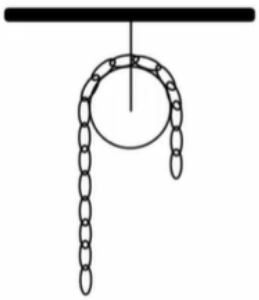
ד. מהי עבודת הכוח F מרגע $t=0\sec$ ועד ל-$t=3\sec$?

4) קופסה מחליקה על מקטעים ישרים*

קופסה משוחררת ממנוחה ומתחילה להחליק לאורך מסלול שאינו ידוע,
אך מורכב מקטעים ישרים בלבד.
בין הקופסה למשטח עליו היא מחליקה קיים
חיכוך והקופסה נעצרת בנקודה
המרוחקת 900m אופקית ו-90m מתחת
לנקודה בה התחילה.
חשבו את מקדם החיכוך, לא חסרים נתונים.

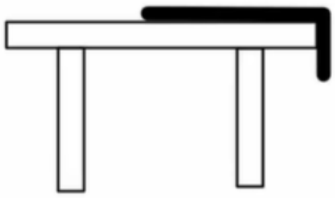


5) שרשרת על גלגלת



שרשרת בעלת מסה M ואורך L מונחת על גלגלת
אידאלית התלויה מהתקרה.
השרשרת מונחת כך שרבע מהשרשרת בצד אחד של
הגלגלת ושאר השרשרת בצד השני.
הנח שהחלק על הגלגלת עצמה זניח.
המערכת משוחררת ממנוחה.
מצאו את מהירות השרשרת ברגע שהקצה האחרון
שלה עובר את הגלגלת.

6) חבל מחליק משולחן אנרגיה ומשוואת תנועה*



חבל באורך L ומסה M מונח על שולחן חסר חיכוך כך שהקצה של החבל באורך d נשמט מחוץ לשולחן. החבל מוחזק ומשוחרר ממנוחה.

א. רשמו את האנרגיה הקינטית והאנרגיה הפוטנציאלית במהלך החלקת החבל.

ב. השתמשו בשימור אנרגיה ומצאו את משוואת התנועה של החבל.

ג. השתמשו במשוואת התנועה ומצאו את מהירות החלקת כל החבל מהשולחן למטה.

7) חישוב עבודה של כוח במסלול מעגלי ואלפטי

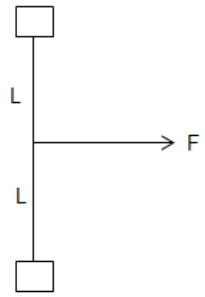
נתון הכוח הבא: $\vec{F}=a(2x+4y)x+b(4x-2y)y$

א. מצא תנאי על a ו- b כך שהכוח יהיה משמר.

ב. מצא את העבודה שעושה הכוח על גוף הנע במסלול סגור לאורך מעגל המתואר ע"י: $\vec{r}=R\cos\theta x+R\sin\theta y$ כאשר הגוף מתחיל את תנועתו מהנקודה $(R,0)$.

ג. מצא את העבודה שעושה הכוח על גוף הנע במסלול סגור לאורך אליפסה המתוארת ע"י: $\vec{r}=d\cos\theta x=k\sin\theta y$ כאשר הגוף מתחיל את תנועתו מהנקודה $(d,0)$.

8) חוט מושך שתי מסות מחוברות בחוט**



חוט חסר מסה באורך $2L$ מחבר שתי מסות הנעות במישור אופקי ללא חיכוך.
כוח אופקי קבוע ונתון מושך את החוט במרכזו, בכיוון מאונך לחוט.
הנח שהמסות מתנגשות ונדבקות בהתנגשות.
כמה אנרגיה הלכה לאיבוד בהתנגשות?

תשובות סופיות:

1) א. בנקודת הרפיון של הקפיץ. ב. $V=\sqrt{\frac{kd^2}{m_1+m_2}}$

2) א. $a_{(x)}=15x^2-7x-3$ ב. $x=0.738m$ ג. $W=0.75J$

ד. $V=4.64\frac{m}{s}$

3) א. (1) $x=12$ (2) $F=103.7N$ ב. $x=2m$ ג. $E_k=62.5J$

ד. $W=3935J$

4) 0.1

5) $V=\sqrt{\frac{3gL}{8}}$

6) א. $E=\frac{1}{2}MV^2-\frac{M}{2}g\frac{y^2}{2}$ ב. $\ddot{y}=\frac{g}{L}y$

ג. $V(y=L)=\sqrt{\frac{g}{L}\left(L^2-d^2\right)}$

7) א. $\vec{\nabla}\times\vec{F}=0\Rightarrow a=b$ ב. $W=R^2\left(0-4a\pi+4b\pi\right)$ ג. $W=k\cdot d\left(0-4a\pi+4b\pi\right)$

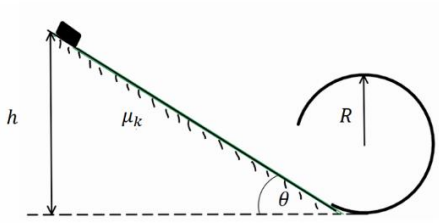
8) $\Delta E=F\cdot l$

תרגילים מסכמים כולל תנועה מעגלית:

שאלות:

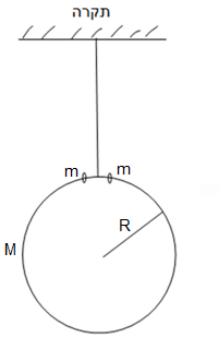
1) תנאי להשלים סיבוב עם החיכוך במישור משופע

גוף בעל מסה m מחליק על גבי מסילה המתוארת באיור.
מקדם החיכוך בין הגוף למישור המשופע הוא μ_k.
זווית המישור היא θ.
החלק המעגלי חסר חיכוך.
מצא את h הנמוך ביותר עבורו הגוף ישלים סיבוב בחלק העגול.



2) שני חרוזים על טבעת מתרוממת*

טבעת בעלת רדיוס R ומסה M תלויה מהתקרה באמצעות חוט. מניחים בקצה העליון של הטבעת שני חרוזים בעלי מסה זהה m.
החרוזים מתחילים ליפול ממנוחה לשני צדי הטבעת.
מצא את היחס בין המסות הדרוש על מנת שהטבעת תתרומם במהלך נפילת הכדורים.

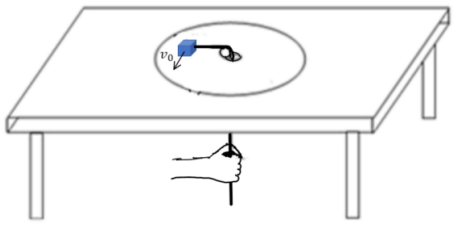


3) מסה מסתובבת על שולחן ונמשכת למרכז*

מסה m נעה על שולחן חסר חיכוך בתנועה מעגלית ברדיוס R ובמהירות v_0.
חוט קשור אל המסה הולך למרכז השולחן ועובר דרך גלגלת אידיאלית וחור בשולחן.
מושכים את החוט כך שהמסה מתקרבת למרכז.

א. מהי המהירות הזוויתית כתלות ב- r (המרחק ממרכז הסיבוב).
השתמשו בשיקולי כוחות בלבד. רמז: אין כוחות בציר $\hat{\theta}$.

ב. הוכיחו שהעבודה שהושקעה במשיכת החוט עד לרדיוס R_2 כלשהו הקטן מ- R זהה לשינוי באנרגיה הקינטית של המסה.
בסעיף זה ניתן להניח שהמהירות הרדיאלית קבועה.



תשובות סופיות:

1) $h_{min}=\frac{2.5R}{1-\frac{\mu_k}{\tan\theta}}$

2) $\frac{m}{M}\geq\frac{3}{2}$

3) א. $\omega(r)=\frac{v_0R}{r^2}$ ב. הוכחה.