הסתברות וסטטיסטיקה

פרק 47 - סכום מקרי

תוכן העניינים

1. סכום מקרי 1

סכום מקרי:

רקע:

N הוא משתנה מקרי בדיד שערכיו שלמים ואי-שליליים.
$X_1, X_2 \ldots$ הם משתנים מקריים שווי-התפלגות ובלתי-תלויים זה בזה וב-N.
$\sum_{i=1}^{N} X_i$ הוא סכום מספר מקרי של אותם משתנים מקריים, הנקרא סכום מקרי.
התוחלת והשונות של הסכום יחושבו על ידי הנוסחאות הבאות:

$$E\left[\sum_{i=1}^{N} X_i\right] = E[N]E[X_1] .$$

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right) = E[N]\mathrm{Var}(X_1) + \left(E[X_1]\right)^2 \mathrm{Var}(N) .$$

אם $N = 0$ אז גם סכום המשתנים שווה ל-0.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

מספר הפניות למוקד תשלומים במשך שעה הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר 100. מספר התשלומים, המתבצעים בכל פנייה למוקד, הוא משתנה מקרי בינומי עם הפרמטרים 4 ו-0.15.
אין תלות בין פניות שונות שמתקבלות במוקד, ואין תלות בין מספרי התשלומים שנעשים בפניות השונות סך-כל הפניות שמתקבלות במוקד במשך שעה.

א. מהי התוחלת של מספר התשלומים שמתבצעים במוקד במשך שעה?

ב. מהי השונות של מספר התשלומים שמתבצעים במוקד במשך שעה?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) N הוא משתנה מקרי אחיד בדיד המתפלג מ-10 ועד 99. $X_1, X_2 \ldots$ הם משתנים מקריים שווי-התפלגות ובלתי-תלויים זה בזה וב-N המתפלגים נורמלית עם תוחלת 50 ושונות 10. מצאו את התוחלת והשונות של: $\sum_{i=1}^{N} X_i$.

2) נתון ניסוי דו שלבי: בשלב הראשון מטילים קובייה הוגנת עד הפעם הראשונה שמתקבלת התוצאה 4. בשלב השני מטילים קובייה הוגנת כמספר הפעמים שהוטלה הקובייה בשלב הראשון. מהי התוחלת ומהי השונות של סכום כלל התוצאות של הטלות הקובייה בשלב השני של הניסויי?

3) מספר הקונים המגיעים ביום ראשון לסניף מסוים של סופרמרקט הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר 1,000. הקונה ה-i-י, שמגיע ביום ראשון לסניף זה ממחזר X_i בקבוקים, לכל $i = 1,2,\ldots$, כאשר המשתנים המקריים X_i, מוגדרים על ידי: $X_i = Y_i - 1$, עבור Y_i שהתפלגותו גיאומטרית עם הפרמטר 0.2. כמו כן, נניח שאין תלות בין מספר הבקבוקים שקונים שונים ממחזרים, וכי גם אין תלות בין מספר הקונים שמגיעים לסניף ביום ראשון למספר הבקבוקים שכל אחד מהם ממחזר.
חשבו את התוחלת והשונות של מספר הבקבוקים הממוחזרים ביום ראשון על ידי הקונים בסניף הסופרמרקט.

4) X הוא משתנה מקרי רציף בעל פונקציית הצפיפות הבאה:

$$f(X) = \begin{cases} KX & 2 < X < 3 \\ 0 & else \end{cases}.$$

ביצעו מדגם מקרי בגודל Y מהתפלגותו של X. נתון ש-Y הוא משתנה מקרי המתפלג גאומטרית עם סיכוי להצלחה בניסוי בודד של 0.2. מצאו את התוחלת של: $\sum_{i=1}^{Y} X_i$.

תשובות סופיות:

1) תוחלת: 2,725 , שונות: 1,687,837.

2) תוחלת: 210 , שונות: 385.

3) תוחלת: 4,000 , שונות: 36,000.

4) תוחלת: $12\frac{2}{3}$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל