

# מתמטיקה לכלכלנים א

פרק 5 - סדרות

תוכן העניינים

1. היכרות עם סדרות ..... (ללא ספר)
2. חישוב גבול לפי כללי חשבון גבולות ..... 1
3. חישוב גבול לפי אוילר ..... 3
4. חישוב גבול לפי כלל הסנדוויץ' ..... 4
5. חישוב גבול לפי מבחן המנה ומבחן השורש ..... 6
6. חישוב גבול של סדרה רקורסיבית ..... 7
7. חישוב גבול לפי ההגדרה ..... 9

## חישוב גבול לפי כללי חשבון גבולות

### שאלות

חשבו את הגבולות הבאים :

- (1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (e^{-n})^{\ln n}$
  - (2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 + 2}{n^2 + 1000n}$
  - (3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 + 2n^2 + 6}{3n^3 + 10n}$
  - (4)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 + 2n^2 + 6}{3n^5 + 10n}$
  - (5)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^2 - 5n + 6}{2n + 10} - \frac{n}{2} \right)$
  - (6)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 1}}{n}$
  - (7)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^4 + 2n^2 + 6 + 27n^6}}{\sqrt{3n^3 + 10n + 4n^4}}$
  - (8)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{3n-3}}{\sqrt{4n+1} - \sqrt{5n-1}}$
  - (9)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{16^n + 4^{n+1}}{2^{4n+2} + 2^{n+3}}$
  - (10)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot 9^n + 3^{n+1}}{81^{0.5n} + 3^{n+3}}$
  - (11)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{4n^2 + 2}{n^2 + 1000n}}$
  - (12)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left( \frac{3n^3 - 5n - 1}{n^3 - 2n^2 + 1} \right)$
  - (13)  $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{n^4 + 2n^2 + 6}{3n^4 + 10n}}$
  - (14)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[5]{\frac{an+1}{bn+2}}$
  - (15)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 5n} - n)$
  - (16)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + kn} - n)$
  - (17)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n + 1} - n)$
  - (18)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^4 + n^2 + 1} - n^2)$
  - (19)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + an} - \sqrt{n^2 + bn})$
  - (20)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + \dots + n}{n^2 + 4n + 1}$
  - (21)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{n^3 + n^2 + 1}$
  - (22)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right)$
- \* רמז לשאלה 22:  $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

### הערה חשובה מאוד!

בפתרון המלא, יופיע במקום המשתנה  $n$  – המשתנה  $x$ . יש להתייחס אל  $x$  כאל מספר טבעי! בנוסף, יש לזכור שסדרה היא פונקציה (מהטבעיים לממשיים) ולכן לעיתים אומר פונקציה במקום סדרה.

## תשובות סופיות

- |                                                                                                                    |                       |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------|
| 4 (2                                                                                                               | 0 (1                  |
| 0 (4                                                                                                               | $\infty$ (3           |
| 1 (6                                                                                                               | -5 (5                 |
| $\frac{1-\sqrt{3}}{2-\sqrt{5}}$ (8                                                                                 | 1.5 (7                |
| 4 (10                                                                                                              | 0.25 (9               |
| $\ln 3$ (12                                                                                                        | 2 (11                 |
|                                                                                                                    | $e^{\frac{1}{3}}$ (13 |
| (14 $(\lim a_n = \infty) \Leftrightarrow (a > 0, b = 0)$ , $(\lim a_n = \sqrt[5]{a/b}) \Leftrightarrow (b \neq 0)$ |                       |
| $(\lim a_n = -\infty) \Leftrightarrow (a < 0, b = 0)$                                                              |                       |
| $\frac{k}{2}$ (16                                                                                                  | 2.5 (15               |
| 0.5 (18                                                                                                            | 0.5 (17               |
| 0.5 (20                                                                                                            | $\frac{a-b}{2}$ (19   |
| 1 (22                                                                                                              | $\frac{1}{3}$ (21     |

## חישוב גבול לפי אוילר

### שאלות

חשבו את הגבולות הבאים :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n \quad (2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2}{n}\right)^n \quad (3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{n^2-1} \quad (4)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+3}{2n-3}\right)^n \quad (5)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n+4}\right)^{4n^2} \quad (6)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+4n+1}{n^2+n+2}\right)^{10n} \quad (7)$$

### תשובות סופיות

$$e^{0.5} \quad (1)$$

$$1 \quad (2)$$

$$e^2 \quad (3)$$

$$e^{-1} \quad (4)$$

$$e^3 \quad (5)$$

$$e^{-12} \quad (6)$$

$$e^{30} \quad (7)$$

## חישוב גבול לפי כלל הסנדוויץ'

## שאלות

חשבו את הגבולות בשאלות 1-5 :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n + 4^n} \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} \quad (2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + 2^{4n + \frac{1}{n}}} \quad (3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} \quad (4)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right) \quad (5)$$

רמז לשאלה 4: הוכיחו כי  $a_n < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ .

(6) הוכיחו שכל אחת מהסדרות הבאות מתכנסת ל-0 :

$$א. a_n = \left( \sqrt{2} - 2^{\frac{1}{3}} \right) \left( \sqrt{2} - 2^{\frac{1}{5}} \right) \cdots \left( \sqrt{2} - 2^{\frac{1}{2n+1}} \right)$$

$$ב. a_n = n^\alpha - (n+1)^\alpha, \alpha \in (0,1)$$

(7) יהי  $x$  מספר ממשי וחיובי.

$$נתבונן בסדרה:  $a_n = \frac{6n + \sqrt{x^2 n^2}}{3n + \sqrt{2}}$$$

הוכיחו כי  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n > 2$ .

$$(8) \text{ חשבו את הגבול } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n^2]{2^{3n^2-4} + 3^{2n^2+1} + 4^{1.5n^2+5} + 10^n}$$

**תשובות סופיות**

- (1) 4
- (2) 0
- (3) 1
- (4) 0
- (5) 1
- (6) שאלת הוכחה.
- (7) שאלת הוכחה.
- (8) 9

## חישוב גבול לפי מבחן המנה ומבחן השורש

### שאלות

חשבו את הגבולות הבאים :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!} \quad (2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{4n} \quad (4)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{(n!)^2}} \quad (3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{(2n)!}}{2n} \quad (5)$$

### תשובות סופיות

$$0 \quad (2)$$

$$\frac{1}{4e} \quad (4)$$

$$0 \quad (1)$$

$$4 \quad (3)$$

$$\infty \quad (5)$$

## חישוב גבול של סדרה רקורסיבית

### שאלות

בשאלות 1-3 נתונה סדרה בעזרת נוסחת נסיגה (רקורסיה). הוכיחו שהסדרה מתכנסת וחשבו את גבולה.

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}, \quad a_1 = \sqrt{2} \quad (1)$$

$$a_{n+1} = \sqrt{2a_n - 1}, \quad a_1 = 2 \quad (2)$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \left( a_n + \frac{1}{a_n} \right), \quad a_1 = 2 \quad (3)$$

$$(4) \quad \text{יהיו } x_1 > 0, a > 0.$$

נגדיר סדרה  $x_n$  ברקורסיה על ידי  $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{a}{x_n} \right)$ , לכל  $n$ .  
הוכיחו שהסדרה מתכנסת ל- $\sqrt{a}$ .

$$(5) \quad \text{יהי } x_1 = a \geq 0.$$

נגדיר סדרה  $x_n$  ברקורסיה על ידי  $x_{n+1} = \frac{1}{5} (x_n^2 + 6)$ , לכל  $n$ .

- א. מצאו את כל הערכים של הקבוע  $a$ , עבורם הסדרה עולה/יורדת.  
ב. קבעו האם הסדרה  $x_n$  מתכנסת עבור  $3 < a < 3.5$ .

$$(6) \quad \text{יהיו } 0 < b_1 < a_1.$$

נגדיר  $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$ ,  $b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$ , לכל  $n$ .

הוכיחו שהסדרות  $a_n$  ו- $b_n$  מתכנסות ומתקיים  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ .

(7) נתונה הסדרה  $a_{n+1} = 2a_n + 3a_{n-1}$ ,  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 1$ .

א.1. נגדיר סדרה חדשה  $b_n$  על ידי  $b_n = \frac{a_n}{a_{n+1}}$ .

הניחו שהגבול  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$  קיים וחשבו אותו.

הערה: בשלב זה אין לנו את הכלים להוכיח שהגבול  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$  קיים. בהמשך הפרק נלמד מספר שיטות להוכיח זאת.

א.2. בעזרת התוצאה של הסעיף הקודם הוכיחו שהסדרה  $a_n$  שואפת לאינסוף.

ב.1. מצאו ביטוי סגור עבור הסדרה  $a_n$  (כלומר נוסחה לא רקורסיבית).

ב.2. הוכיחו שהגבול  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}$  קיים, וחשבו אותו.

ב.3. הוכיחו באינדוקציה שהביטוי הסגור שנמצא בסעיף ב.1 הוא אכן נכון.

## תשובות סופיות

(1) הגבול 2.

(2) הגבול 1.

(3) הגבול 1.

(4) הגבול הוא  $\sqrt{a}$ .

(5) א. אם  $2 \leq a \leq 3$  הסדרה יורדת, אחרת היא עולה.

ב. לא מתכנסת.

(6) שאלת הוכחה.

(7) ב.1.  $a_n = \frac{1}{6} \cdot 3^n - \frac{1}{2} \cdot (-1)^n$

## חישוב גבול לפי ההגדרה

## שאלות

על סמך ההגדרה של גבול של סדרה, הוכיחו כי:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} = 1 \quad (2) \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + 1}{4n + 3} = \frac{1}{2} \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 - 2n + 1}{2n^2 + n + 3} = 2 \quad (4) \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + (-1)^n}{n^2 + 1} = 1 \quad (3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^3 - n^2 + 5n + 6 = \infty \quad (6) \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} 2n + 4 = \infty \quad (5)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{2n+1} = \infty \quad (8) \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} \log(2n + 5) = \infty \quad (7)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt{n^2 + 4n} - n \right) = 2 \quad (10) \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} \log \frac{1}{n} = -\infty \quad (9)$$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)