# חשבון אינפיניטסימלי (1)

## פרק 18 - סדרות

### תוכן העניינים

1. היכרות עם סדרות ..... (ללא ספר)
2. חישוב גבול לפי כללי חשבון גבולות ..... 1
3. חישוב גבול לפי אוילר ..... 3
4. חישוב גבול לפי כלל הסנדוויץ ..... 4
5. חישוב גבול לפי מבחן המנה ומבחן השורש ..... 7
6. חישוב גבול של סדרה רקורסיבית ..... 8
7. חישוב גבול לפי ההגדרה ..... 10
8. שלילת הגדרת הגבול של סדרה ..... 12
9. הגדרת הגבול לפי היינה ..... 15
10. תת-סדרה, גבול חלקי, משפט בולצאנו ויירשטראס ..... 17
11. משפט שטולץ ..... 22
12. מבחן קושי להתכנסות סדרות ..... 24
13. שאלות הוכח או הפרך ..... 26

# חישוב גבול לפי כללי חשבון גבולות

## שאלות

חשבו את הגבולות הבאים:

**1)** $\lim_{n\to\infty}\left(e^{-n}\right)^{\ln n}$

**2)** $\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+2}{n^2+1000n}$

**3)** $\lim_{n\to\infty}\frac{n^4+2n^2+6}{3n^2+10n}$

**4)** $\lim_{n\to\infty}\frac{n^4+2n^2+6}{3n^5+10n}$

**5)** $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-5n+6}{2n+10}-\frac{n}{2}\right)$

**6)** $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}}{n}$

**7)** $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^4+2n^2+6+27n^6}}{\sqrt{3n^3+10n+4n^4}}$

**8)** $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{3n-3}}{\sqrt{4n+1}-\sqrt{5n-1}}$

**9)** $\lim_{n\to\infty}\frac{16^n+4^{n+1}}{2^{4n+2}+2^{n+3}}$

**10)** $\lim_{n\to\infty}\frac{4\cdot 9^n+3^{n+1}}{81^{0.5n}+3^{n+3}}$

**11)** $\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{4n^2+2}{n^2+1000n}}$

**12)** $\lim_{n\to\infty}\ln\left(\frac{3n^3-5n-1}{n^3-2n^2+1}\right)$

**13)** $\lim_{n\to\infty}e^{\frac{n^4+2n^2+6}{3n^4+10n}}$

**14)** $\lim_{n\to\infty}\sqrt[5]{\frac{an+1}{bn+2}}$

**15)** $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+5n}-n\right)$

**16)** $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+kn}-n\right)$

**17)** $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n+1}-n\right)$

**18)** $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^4+n^2+1}-n^2)$

**19)** $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+an}-\sqrt{n^2+bn}\right)$

**20)** $\lim_{n\to\infty}n\cdot\sin\left(\frac{4}{n}\right)$

**21)** $\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+...+n}{n^2+4n+1}$

**22)** $\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+...+n^2}{n^3+n^2+1}$

**23)** $\lim_{n\to\infty}4^n\sin\frac{1}{n}$

**24)** $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+...\frac{1}{n(n+1)}\right)$

* רמז לשאלה **24**: $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$.

**<u>הערה חשובה מאוד!</u>**

בפתרון המלא, יופיע במקום המשתנה $n$ – המשתנה $x$. יש להתייחס אל $x$ כאל מספר טבעי!
בנוסף, יש לזכור שסדרה היא פונקציה (מהטבעיים למשיים) ולכן לעיתים אומר פונקציה במקום סדרה.

## תשובות סופיות

1) $0$
2) $4$
3) $\infty$
4) $0$
5) $-5$
6) $1$
7) $1.5$
8) $\frac{1-\sqrt{3}}{2-\sqrt{5}}$
9) $0.25$
10) $4$
11) $2$
12) $\ln 3$
13) $e^{\frac{1}{3}}$
14) $\left(b\neq 0\right)\Leftarrow\left(\lim a_n=\sqrt[5]{a/b}\right)$ , $\left(a>0,\ b=0\right)\Leftarrow\left(\lim a_n=\infty\right)$ ,
$\left(a<0,\ b=0\right)\Leftarrow\left(\lim a_n=-\infty\right)$
15) $2.5$
16) $\frac{k}{2}$
17) $0.5$
18) $0.5$
19) $\frac{a-b}{2}$
20) $4$
21) $0.5$
22) $\frac{1}{3}$
23) $\infty$
24) $1$


כתב ופתר – גיא סלומון ©

# חישוב גבול לפי אוילר

## שאלות

חשבו את הגבולות הבאים:

1) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n$

2) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n$

3) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n}\right)^n$

4) $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n^2-1}$

5) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+3}{2n-3}\right)^n$

6) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n+4}\right)^{4n^2}$

7) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+4n+1}{n^2+n+2}\right)^{10n}$

8) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\tan\frac{1}{n}\right)^n$

## תשובות סופיות

1) $e^{0.5}$

2) $1$

3) $e^2$

4) $e^{-1}$

5) $e^3$

6) $e^{-12}$

7) $e^{30}$

8) $e$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# חישוב גבול לפי כלל הסנדוויץ'

## שאלות

בשאלות **1-10** חשבו את הגבול:

**1)** $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n+3^n+4^n}$

**2)** $\lim_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n}$

**3)** $\lim_{n\to\infty}\frac{\cos(2n+1)}{n}$

**4)** $\lim_{n\to\infty}\frac{3n+\sin n}{4n+\cos n}$

**5)** $\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+n+\sin 2n}{n^2+\cos 3n}$

**6)** $\lim_{n\to\infty}\frac{3n+\arctan(2n-3)}{4n+\arctan(n-\ln n)}$

**7)** $\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}$

**8)** $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+2^{4n+\frac{1}{n}}}$

**9)** $\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2n}$

**10)** $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$

רמז לשאלה **9**: הוכיחו כי $a_n<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

**11)** הוכיחו שכל אחת מהסדרות הבאות מתכנסת ל-0.

א. $a_n=\left(\sqrt{2}-2^{\frac{1}{3}}\right)\left(\sqrt{2}-2^{\frac{1}{5}}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\sqrt{2}-2^{\frac{1}{2n+1}}\right)$

ב. $\alpha\in(0,1)$ , $a_n=n^{\alpha}-(n+1)^{\alpha}$

**12)** יהי $x$ מספר ממשי וחיובי.

נתבונן בסדרה: $a_n=\frac{6n+\sqrt{\lfloor x^2n^2\rfloor}}{3n+\sqrt{2}}$.

הוכיחו כי $\lim_{n\to\infty}a_n>2$.

**13)** חשבו את הגבול $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n^2]{2^{3n^2-4}+3^{2n^2+1}+4^{1.5n^2+5}+10^n}$.

**14)** חשבו את הגבול $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+3\sqrt{k}}}$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**15)** חשבו את הגבול $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=n+3}^{2n+4}\frac{1}{\sqrt{2n^2+k\sqrt{n}}}$.

**16)** חשבו את הגבול $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n^2}\frac{2n^2+3n+5}{\sqrt[3]{5n^{12}+2k^5+k^3+1}}$.

**17)** חשבו את הגבול $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=n^2}^{n^2+n}\sqrt{k}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$.

**18)** תהי $(a_n)$ סדרה **חיובית**, המקיימת $\frac{a_{n+1}}{a_n}\le q<1$ לכל $n$ טבעי.

הוכיחו כי $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

האם ניתן לפתור ישירות בעזרת מבחן המנה?


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) $4$
2) $0$
3) $0$
4) $0.75$
5) $3$
6) $\frac{3}{4}$
7) $0$
8) $16$
9) $0$
10) $1$
11) שאלת הוכחה.
12) שאלת הוכחה.
13) $9$
14) $1$
15) $\frac{1}{2}$
16) $\frac{2}{\sqrt[3]{5}}$
17) $1$
18) שאלת הוכחה.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

# חישוב גבול לפי מבחן המנה ומבחן השורש

## שאלות

חשבו את הגבולות הבאים:

1) $\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}$

2) $\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}$

3) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{(n!)^2}}$

4) $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{4n}$

5) $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{(2n)!}}{2n}$

## תשובות סופיות

1) $0$

2) $0$

3) $4$

4) $\frac{1}{4e}$

5) $\infty$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# חישוב גבול של סדרה רקורסיבית

## שאלות

בשאלות **1-3** נתונה סדרה בעזרת נוסחת נסיגה (רקורסיה).
הוכיחו שהסדרה מתכנסת וחשבו את גבולה.

**1)** $a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}\,,\ a_1=\sqrt{2}$

**2)** $a_{n+1}=\sqrt{2a_n-1},\ a_1=2$

**3)** $a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right),\ a_1=2$

**4)** יהיו $a>0$ ו- $x_1>0$.

נגדיר סדרה ברקורסיה על ידי $x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)$, לכל $n$.

הוכיחו שהסרה מתכנסת ל- $\sqrt{a}$.

**5)** יהי $x_1=a\geq 0$.

נגדיר סדרה $x_n$ ברקורסיה על ידי $x_{n+1}=\frac{1}{5}\left(x_n^2+6\right)$, לכל $n$.

א. מצאו את כל הערכים של הקבוע $a$, עבורם הסדרה עולה/יורדת.

ב. קבעו האם הסדרה $x_n$ מתכנסת עבור $3<a<3.5$.

**6)** יהיו $0<b_1<a_1$

נגדיר $b_{n+1}=\sqrt{a_nb_n}$, $a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}$ לכל $n$.

הוכיחו שהסדרות $a_n$ ו- $b_n$ מתכנסות ומתקיים $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**7)** נתונה הסדרה $a_{n+1}=2a_n+3a_{n-1}$ , $a_1=1,\ a_2=1$.

א.1. נגדיר סדרה חדשה $b_n$ על ידי $b_n=\frac{a_n}{a_{n+1}}$.

הניחו שהגבול $\lim_{n\to\infty} b_n$ קיים וחשבו אותו.

הערה: בשלב זה אין לנו את הכלים להוכיח שהגבול $\lim_{n\to\infty} b_n$ קיים.
בהמשך הפרק נלמד מספר שיטות להוכיח זאת.

א.2. בעזרת התוצאה של הסעיף הקודם הוכיחו שהסדרה $a_n$ שואפת לאינסוף.

ב.1. מצאו ביטוי סגור עבור הסדרה $a_n$ (כלומר נוסחה לא רקורסיבית).

ב.2. הוכיחו שהגבול $\lim_{n\to\infty}=\frac{a_n}{a_{n+1}}$ קיים, וחשבו אותו.

ב.3. הוכיחו באינדוקציה שהביטוי הסגור שנמצא בסעיף ב.1 הוא אכן נכון.

**8)** תהי $a_n$ סדרה המוגדרת על ידי $a_1=0.5$ ו- $a_{n+1}=\sin\left(a_n^2\right)$ לכל $n\geq 1$.

הוכיחו כי $\lim_{n\to\infty} a_n=0$.

## תשובות סופיות

**1)** הגבול הוא 2.

**2)** הגבול הוא 1.

**3)** הגבול הוא 1.

**4)** הגבול הוא $\sqrt{a}$.

**5)** א. אם $2\leq a\leq 3$ הסדרה יורדת, אחרת היא עולה. ב. לא מתכנסת.

**6)** שאלת הוכחה.

**7)** ב.1. $a_n=\frac{1}{6}\cdot 3^n-\frac{1}{2}\cdot(-1)^n$

**8)** שאלת הוכחה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# חישוב גבול לפי ההגדרה

## שאלות

בשאלות **1-7** הוכיחו על סמך ההגדרה של גבול של סדרה כי:

**1)** $\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{4n+3}=\frac{1}{2}$

**2)** $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-1}{n^2+1}=1$

**3)** $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+\sin n}{2n^2+3}=\frac{1}{2}$

**4)** $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+(-1)^n}{n^2+1}=1$

**5)** $\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2-2n+1}{2n^2+n+3}=2$

**6)** $\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot\cos^2 n}{n^2+2}=0$

**7)** $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+4n}-n\right)=2$

**8)** נתון כי הסדרה $(a_n)$ מתכנסת.
הוכיחו שגבולה הוא יחיד.

**9)** נתון כי $a_n\to a,\ b_n\to b$.
הוכיחו לפי ההגדרה, כי:
א. $(a_n+b_n)\to a+b$
ב. $(a_n\cdot b_n)\to a\cdot b$

בשאלות **10-14** הוכיחו על סמך ההגדרה של גבול של סדרה כי:

**10)** $\lim_{n\to\infty}2n+4=\infty$

**11)** $\lim_{n\to\infty}n^3-n^2+5n+6=\infty$

**12)** $\lim_{n\to\infty}\log(2n+5)=\infty$

**13)** $\lim_{n\to\infty}e^{2n+1}=\infty$

**14)** $\lim_{n\to\infty}\log\frac{1}{n}=-\infty$

**15)** הוכיחו שהסדרה $1,101,2,102,3,103,4,104,\ldots$ שואפת לאינסוף.

**16)** הוכיחו שהסדרה $1,2,2,3,3,3,4,4,4,4,\ldots$ שואפת לאינסוף.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**17)** הוכיחו שהסדרה $-1,2,-3,4,-5,6,\ldots,(-1)^n n,\ldots$ לא שואפת לאינסוף או למינוס אינסוף.

**18)** הוכיחו או הפריכו:

א. $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} |a_n| = \infty$

ב. $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \Leftarrow \lim_{n\to\infty} |a_n| = \infty$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# שלילת הגדרת הגבול של סדרה

## שאלות

**1)** מצאו את הגבולות החלקיים של הסדרות הבאות,
וכתבו את האיבר הכללי של הסדרה בהתאם לגבולות החלקיים שמצאת.

א. $1,4,1,4,1,4,1,4,\ldots$

ב. $1,4,10,1,4,10,1,4,10,1,4,10,\ldots$

ג. $1,0,-4,1,0,4,1,0,-4,1,0,4,\ldots$

**2)** מצאו את הגבולות החלקיים של הסדרות הבאות,
וכתבו את האיבר הכללי של הסדרה בהתאם לגבולות החלקיים שמצאת.

א. $\frac{1}{3},\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}},\frac{2}{5},\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}},\frac{3}{7},\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}},\frac{4}{9},\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{8}},\ldots$

ב. $\frac{3}{3},\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}},\frac{7}{5},\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{6}},\frac{11}{7},\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{8}},\frac{15}{9},\frac{\mathbf{9}}{\mathbf{10}},\ldots$

ג. $a_n=\frac{(-1)^n n+4}{n+1}$

בשאלות **3-6** הוכיחו לפי ההגדרה כי:

**3)** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+10}{4n+2}\neq\frac{1}{2}$

**4)** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n^2+n+1}{2n^2+2}\neq 1$

**5)** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n^2+4n+1}{2n^2+n+2}\neq\frac{9}{4}$

**6)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\neq 1$

**7)** בסעיפים א-ב הוכיחו לפי ההגדרה כי:

א. לסדרה $a_n=(-1)^n$ לא קיים גבול.

ב. $1$ הוא לא הגבול של הסדרה $a_n=(-1)^n$.

ג. היעזר בתוצאת סעיף א' והוכיחו שלסדרה $b_n=(-1)^n\frac{3n+4}{n-5}$ לא קיים גבול.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**8)** הוכיחו לפי ההגדרה, שהסדרה $0,1,2,0,1,2,0,1,2,\ldots$ מתבדרת.

**9)** הוכיחו לפי ההגדרה, שהסדרה $3,2,1,3,2,1,3,2,1,\ldots$ מתבדרת.

**10)** הוכיחו לפי ההגדרה, שלסדרה $0,0,1,0,0,1,0,0,1,\ldots$ לא קיים גבול.

**11)** הוכיחו לפי ההגדרה, שהסדרה $a_n=\frac{n}{2}-\left[\frac{n}{2}\right]$ מתבדרת.

**12)** הוכיחו לפי ההגדרה, שהסדרה $a_n=\frac{n}{10}-\left[\frac{n}{10}\right]$ מתבדרת.

**13)** הוכיחו לפי ההגדרה, שהסדרה $a_n=\begin{cases}\frac{n+1}{n+1} & n \text{ even}\\ \frac{2n+1}{n+2} & n \text{ odd}\end{cases}$ מתבדרת.

**14)** הוכיחו לפי ההגדרה, שהסדרה $\frac{1}{2},\mathbf{1},\frac{2}{3},\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}},\frac{3}{4},\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}},\frac{4}{5},\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}},\frac{5}{6},\ldots$ מתבדרת.

**15)** הוכיחו לפי ההגדרה, שלסדרה $a_n=\frac{(-1)^n n+1}{n+2}$ אין גבול.

**16)** הוכיחו לפי ההגדרה, שהסדרה $a_n=\sqrt{n}-\left[\sqrt{n}\right]$ מתבדרת.

הדרכה: הוכיחו קודם את סדרת הטענות הבאה:

1. $\sqrt{m^2}-\left[\sqrt{m^2}\right]=0$ לכל $m$ טבעי.
2. $\sqrt{m^2-1}>m-\frac{1}{2}$ לכל $m\geq 2$ טבעי.
3. $\left[\sqrt{m^2-1}\right]=m-1$ לכל $m\geq 2$ טבעי.
4. $\sqrt{m^2-1}-\left[\sqrt{m^2-1}\right]\geq\frac{1}{2}$ לכל $m\geq 2$ טבעי.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**17)** הוכיחו לפי ההגדרה, שהסדרה $a_n=\frac{2n^2+4n+1}{n^2+2n+10}$ לא שואפת ל-$\infty$.

**18)** הוכיחו לפי ההגדרה, שהסדרה $0,1,2,1,4,1,6,1,\ldots$ לא שואפת ל-$\infty$.

**19)** נתונה הסדרה $-1,1,-2,2,-3,3,-4,4,-5,5,\ldots$.
הוכיחו לפי ההגדרה, שהסדרה
א. לא שואפת ל-$\infty$.
ב. לא שואפת ל-$-\infty$.

**20)** הוכיחו לפי ההגדרה, שהסדרה $a_n=n\sqrt{10}+(-1)^n\left[n\sqrt{10}\right]$ לא שואפת ל-$\infty$.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# הגדרת הגבול לפי היינה

## שאלות

**1)** הוכיחו כי:

א. $\sin(2n\pi)=0$

ב. $\cos(2n\pi)=1$

ג. $\sin((2n+0.5)\pi)=1$

ד. $\cos((2n+0.5)\pi)=0$

ה. $\sin((2n+1)\pi)=0$

ו. $\cos((2n+1)\pi)=-1$

ז. $\sin((2n+1.5)\pi)=-1$

ח. $\cos((2n+1.5)\pi)=0$

ט. $\sin(n\pi)=0$

י. $\cos(n\pi)=(-1)^n$

יא. $\sin((n+0.5)\pi)=(-1)^n$

יב. $\cos((n+0.5)\pi)=0$

הוכיחו כי הגבולות בשאלות **2-9** אינם קיימים לפי היינה:

**2)** $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-4}{|x-4|}$

**3)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x+4}{\cos x+10}$

**4)** $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$

**5)** $\lim\limits_{x\to\infty}e^{x-[x]}$

**6)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{1+4^{[10x]}}$

**7)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{[x]\cdot\sin x}{x}$

**8)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x-[\sin x]}$

**9)** $\lim\limits_{x\to 0}\ln\left(4+[\arctan x]\right)$

**10)** נתון כי $f(x)=2^{\left[\frac{x}{2}\right]}$.

א. הוכיחו כי הגבול $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x+1)}{f(x)}$ אינו קיים לפי היינה.

ב. חשבו את הגבול $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)\right)^{\frac{1}{x}}$ לפי היינה.

ג. תנו דוגמה לסדרה חיובית $a_n$, כך ש- $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ אינו קיים אך $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$ קיים.

**11)** הוכיחו כי הגבול $\lim\limits_{x\to\infty}\left\{\sqrt{x}\right\}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x}-\left[\sqrt{x}\right]\right)$ אינו קיים לפי היינה.

רמז: הוכיחו ראשית כי לכל $n$ טבעי מתקיים $\left[n^2-1\right]=n-1$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**10)** ב. $\sqrt{2}$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# תת-סדרה, גבול חלקי, משפט בולצאנו ויירשטראס

## שאלות

**1)** חשבו את הגבולות שלהלן אם הם קיימים.
בכל מקרה שהגבול לא קיים, גם לא במובן הרחב, נמקו מדוע,
וחשבו את כל הגבולות החלקיים (גם גבולות חלקיים במובן הרחב).

א. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-3)^{5n}-2(-3)^n+2}{(-3)^{3n}+(-3)^n+2}$

ב. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-3)^{5n}-2(-3)^n+2}{(-3)^{2n}+(-3)^n+2}$

ג. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n}-1\right)^n$

**2)** חשבו את הגבולות שלהלן אם הם קיימים.
בכל מקרה שהגבול לא קיים, גם לא במובן הרחב נמקו מדוע,
וחשבו את כל הגבולות החלקיים (גם גבולות חלקיים במובן הרחב).

א. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2\left\lfloor\dfrac{n}{2}\right\rfloor-n\right)$

ב. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\lfloor 4n\rfloor-4\lfloor n\rfloor\right)$

ג. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{4}-\left[\dfrac{n}{4}\right]\right)$

**3)** נתון ש- $(a_n)$ סדרה עולה ממש של מספרים שלמים.

א. הוכיחו שקיים איבר אי-שלילי בסדרה.

ב. הוכיחו כי $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{a_n}\right)^{a_n}=e$.

**4)** הוכיחו כי לסדרה הבאה אין גבול: $a_n=\sin\left(\dfrac{n\pi}{3}\right)$.

**5)** חשבו את הגבול הבא $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{n+(-1)^n}{n}\right]^n$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**6)** הוכיחו כי לסדרה הבאה אין גבול: $a_1=2$; $a_{n+1}=\sqrt{11-(a_n)^2}$.

**7)** נתונה הסדרה $a_n$, המוגדרת על ידי $a_1=2$; $a_{n+1}=\frac{1}{\sqrt{a_n}}$.

הוכיחו שהסדרה מתכנסת.

**8)** נתונה הסדרה $a_n$, המוגדרת על ידי $a_1=0\ (n\in\mathbb{N})$; $a_{n+1}=\frac{1}{1+a_n}$.

הוכיחו שהסדרה מתכנסת.

**9)** א. הוכיחו שכל מספר המופיע אינסוף פעמים בסדרה הינו גבול חלקי של הסדרה.
ב. מצאו סדרה שיש לה אינסוף גבולות חלקיים.

**10)** נתונה סדרה $a_n=\sin\frac{\pi}{4}n$.

מצאו את כל הגבולות החלקיים של הסדרה ובמיוחד את $\underline{\lim}_{n\to\infty}a_n$ ו- $\overline{\lim}_{n\to\infty}a_n$.

**11)** נתונה סדרה $a_n=n\sin\frac{\pi}{4}n$.

מצאו את כל הגבולות החלקיים של הסדרה ובמיוחד את $\underline{\lim}_{n\to\infty}a_n$ ו- $\overline{\lim}_{n\to\infty}a_n$.

**12)** נתונה סדרה $a_n=1,1,2,1,2,3,1,2,3,4,1,2,3,4,5,\ldots$.

מצאו את כל הגבולות החלקיים של הסדרה ובמיוחד את $\underline{\lim}_{n\to\infty}a_n$ ו- $\overline{\lim}_{n\to\infty}a_n$.

**13)** נתונה סדרה $a_n=(-1)^n\frac{n+1}{n}$.

מצאו את כל הגבולות החלקיים של הסדרה ובמיוחד את $\underline{\lim}_{n\to\infty}a_n$ ו- $\overline{\lim}_{n\to\infty}a_n$.

**14)** נתונה סדרה $a_n=(-1)^n\cdot\sqrt[n]{n^{40}}+\frac{1}{n^2}\sin\left(\frac{n}{4}\right)$.

מצאו את $\underline{\lim}_{n\to\infty}a_n$ ו- $\overline{\lim}_{n\to\infty}a_n$.

**15)** נתונה סדרה $a_n$, ונגדיר סדרה חדשה $b_n$ על ידי $b_n=\sqrt[n]{n}\cdot a_n$.
הוכיחו כי לשתי הסדרות אותם גבולות חלקיים.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**16)** תהי $a_n$ סדרה, ונניח כי 10 ו-11 הם שני גבולות חלקיים שלה.

הוכיחו שלכל $N\in\mathbb{N}$ קיימים $m,n\in\mathbb{N}$, כך ש- $\left|a_m-a_n\right|>\frac{1}{2}$.

**17)** נתונה סדרה $a_n$.

$a_{n_k}$ ו- $a_{m_k}$ שתי תת-סדרות של $a_n$ המקיימות:

1. $a_{n_k}\to L$ , $a_{m_k}\to L$

2. כל איברי הסדרה $a_n$ מופיעים בלפחות אחת מתת הסדרות הנתונות.

הוכיחו: $a_n\to L$.

הערה: טענה זו הוסברה והודגמה בסרטון "שיטה להוכחת קיום גבול לסדרה לא מונוטונית", ובעזרתה פתרנו את שאלות **4-5**.

**18)** נתונה סדרה חיובית $a_n$ המקיימת $\overline{\lim_{n\to\infty}}a_n\cdot\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{a_n}=1$.

הוכיחו כי הסדרה מתכנסת.

**19)** פתרו את שני הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו שלכל סדרה חסומה $a_n$, $\inf a_n\le\underline{\lim}a_n\le\overline{\lim}a_n\le\sup a_n$

הערה: $\sup a_n$ הוא החסם העליון של הקבוצה $\{a_1,a_2,...,a_n\}$.

ב. מצאו סדרה $a_n$ שעבורה $\inf a_n<\underline{\lim}a_n<\overline{\lim}a_n<\sup a_n$.

**20)** הוכיחו שהסדרה $a_n$ מתכנסת במובן הרחב אם ורק אם $\underline{\lim}a_n=\overline{\lim}a_n$.

**21)** הוכיחו את המשפט המפורסם הבא:

לכל שתי סדרות חסומות $a_n,b_n$ מתקיים

א. $\overline{\lim}\left(a_n+b_n\right)\le\overline{\lim}a_n+\overline{\lim}b_n$

ב. $\underline{\lim}\left(a_n+b_n\right)\ge\underline{\lim}a_n+\underline{\lim}b_n$

**22)** נתונות שתי סדרות חסומות $a_n$ ו- $b_n$.

קבעו האם הטענה בכל סעיף נכונה, והוכיחו זאת.

א. ייתכן שמתקיים $\overline{\lim}\left(a_n+b_n\right)<\overline{\lim}a_n+\overline{\lim}b_n$.

ב. ייתכן שמתקיים התנאי בסעיף א' ושתי הסדרות לעיל מתכנסות.

ג. ייתכן שמתקיים התנאי בסעיף א' ורק אחת מהסדרות לעיל מתכנסת.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**23)** יהיו $(a_n)$ ו- $(b_n)$ סדרות חסומות.

הוכיחו כי $\overline{\lim_{n\to\infty}}(a_n+b_n)\geq \underline{\lim_{n\to\infty}}a_n+\overline{\lim_{n\to\infty}}b_n$.

**24)** תהי $(a_n)$ סדרה חסומה של מספרים חיוביים, כך ש- $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}a_n)=1$.

א. הוכיחו שאם $(a_n)$ מתכנסת, אז $\lim_{n\to\infty}a_n=1$.

ב. הוכיחו שאם $L>0$ הוא גבול חלקי של $(a_n)$,

אז גם $\frac{1}{L}$ הוא גבול חלקי שלה.

ג. הוכיחו שלא ייתכן ש- $L=0$ הוא גבול חלקי של $(a_n)$.

ד. הראו, באמצעות דוגמה, שללא דרישת החסימות,

ייתכן ש- $L=0$ הוא גבול חלקי של $(a_n)$.

**25)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. הדגימו שתי סדרות חסומות ומתבדרות, $(a_n)$ ו- $(b_n)$,

המקיימות $\lim_{n\to\infty}a_nb_n=1$.

ב. יהיו $(a_n)$ ו- $(b_n)$ שתי סדרות, המקיימות $\lim_{n\to\infty}a_nb_n=1$.

הוכיחו שאם לכל $n$ מתקיים $0\leq a_n,b_n\leq 1$, אז $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=1$.

**26)** תהי $a_n=\left\langle\sqrt{n}\right\rangle=\sqrt{n}-\left[\sqrt{n}\right]$.

א. הוכיחו כי הסדרה $(a_n)$ חסומה.

ב. מצאו את $\inf\{a_n\mid n\in\mathbb{N}\}$ ו- $\underline{\lim_{n\to\infty}}a_n$, וקבעו האם ל- $\{a_n\mid n\in\mathbb{N}\}$ יש מינימום.

ג. הוכיחו כי לכל $n$ מתקיים $\left\langle\sqrt{n^2-1}\right\rangle=\sqrt{n^2-1}-n+1$.

ד. הוכיחו כי $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-1}-(n-1)\right)=1$.

ה. היעזרו בסעיפים ג' ו-ד', כדי להוכיח ש- $L=1$ הוא גבול חלקי של $(a_n)$.

ו. מצאו את $\sup\{a_n\mid n\in\mathbb{N}\}$ ואת $\overline{\lim_{n\to\infty}}a_n$, וקבעו האם ל- $\{a_n\mid n\in\mathbb{N}\}$

יש מקסימום.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**27)** תהי $(a_n)=\left(n-\sqrt{n}\left[\sqrt{n}\right]\right)$.

א. הוכיחו כי הסדרה $(a_n)$ חסומה מלרע.

ב. הוכיחו ש-$0$ הוא גבול חלקי של $(a_n)$.

ג. מצאו את $\inf\{a_n \mid n\in N\}$ ואת $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n$, וקבעו האם ל-$\{a_n \mid n\in N\}$ יש מינימום.

ד. יהי $\ell$ מספר טבעי.

הוכיחו שכמעט לכל $n$, מתקיים $n<\sqrt{n^2+2\ell}<n+1$.

ה. יהי $\ell$ מספר טבעי.

הוכיחו כי $\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^2+2\ell}-n\right)=\ell$.

ו. הוכיחו, בעזרת סעיף ה', שכל מספר טבעי הוא גבול חלקי של $(a_n)$.

ז. האם $(a_n)$ חסומה מלעיל?

ח. חשבו את $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n$.

ט. מצאו את $\sup\{a_n \mid n\in\mathbb{N}\}$, וקבעו האם לקבוצה $\{a_n \mid n\in\mathbb{N}\}$ יש מקסימום.

## תשובות סופיות

**1)** א. הסדרה שואפת לאינסוף.
ב. לסדרה אין גבול. הגבולות החלקיים של הסדרה הם אינסוף ומינוס אינסוף.
ג. לסדרה אין גבול. הגבולות החלקיים היחידים של הסדרה הם $\pm\frac{1}{e}$.

**2)** א. לסדרה אין גבול. הגבולות החלקיים היחידים של הסדרה הם $0$, $-1$.
ב. הגבול של הסדרה הוא $0$.
ג. לסדרה אין גבול. הגבולות החלקיים היחידים של הסדרה הם $0, 0.25, 0.5, 0.75$.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# משפט שטולץ

## שאלות

**1)** חשבו: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\ldots+\sqrt[n]{n}}{n}$.

**2)** חשבו: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1\cdot 3+2\cdot 5+3\cdot 7+\ldots+n\cdot(2n+1)}{n^3}$.

**3)** חשבו: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+3^p+\ldots+n^p}{n^{p+1}}$, כאשר $p$ קבע שלם וחיובי.

**4)** חשבו: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1\cdot c_1+2\cdot c_2+3\cdot c_3+\ldots+n\cdot c_n}{n^3}$, אם ידוע כי $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{c_n}{n}=k$.

**5)** חשבו: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left[1^2\cdot a\right]+\left[2^2\cdot a\right]+\ldots+\left[n^2\cdot a\right]}{n^3}$, כאשר $a$ קבוע ממשי.

**6)** נתון כי $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=L$.

הוכיחו כי:

א. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}=L$ (סדרת הממוצעים החשבונית מתכנסת ל-$L$).

ב. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}}=L$ (סדרת הממוצעים ההרמונית מתכנסת ל-$L$).

ג. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n}=L$ (סדרת הממוצעים ההנדסית מתכנסת ל-$L$).

* הערה: בסעיף ב' הניחו כי $L\neq 0$, ובסעיף ג' הניחו כי $a_n>0$ לכל $n$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) $1$
2) $\frac{2}{3}$
3) $\frac{1}{p+1}$
4) $\frac{k}{3}$
5) $\frac{a}{3}$
6) שאלת הוכחה.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

# מבחן קושי להתכנסות סדרות

## שאלות

**1)** הסדרה $a_n$ מקיימת $|a_n - a_{n-1}| < \frac{1}{2^n}$, לכל $n$.
הוכיחו שהסדרה מתכנסת.

**2)** הוכיחו שהסדרה $a_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}$ שואפת לאינסוף.

**3)** הוכיחו כי הסדרה $a_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$ מתכנסת.

**4)** הסדרה $a_n$ מקיימת $|a_n - a_{n-1}| < a^n$, לכל $n$, כאשר $0 < a < 1$.
הוכיחו שהסדרה מתכנסת.

**5)** הוכיחו כי הסדרה $a_n = \frac{\cos\alpha}{3} + \frac{\cos 2\alpha}{3^2} + \ldots + \frac{\cos(n\alpha)}{3^n}$ מתכנסת.

**6)** סדרה $x_n$ מקיימת $|x_{n+2} - x_{n+1}| \le k|x_{n+1} - x_n|$ לכל $n$, כאשר $0 < k < 1$.
הוכיחו שהסדרה היא סדרת קושי ולכן מתכנסת.

**7)** נתונה סדרה $x_n$ המוגדרת על ידי $x_{n+1} = \frac{1}{1+x_n}$, $x_1 = 1$.
הוכיחו שהסדרה מתכנסת וחשבו את גבולה.

**8)** בכל אחד מהסעיפים הבאים הוכיחו שהסדרה $x_n$ מתכנסת.

א. $x_1 = 1, \qquad x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}$

ב. $x_1 = 1, \qquad x_{n+1} = \frac{1}{2 + x_n^2}$

ג. $x_1 = 1, \quad x_{n+1} = \frac{1}{6}(x_n^2 + 8)$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**9)** נגדיר סדרה $x_n$ על ידי $x_1=1,\ x_2=2,\ x_{n+2}=\frac{3}{4}x_n+\frac{1}{4}x_{n+1}$.

הוכיחו שהסדרה מתכנסת וחשבו את גבולה.

**10)** סדרה $x_n$ מקיימת $x_{n+2}=\sqrt{x_{n+1}x_n}$ לכל $n$ טבעי, ו- $1\le x_1\le x_2\le 2$.
הוכיחו שהסדרה מתכנסת.

הדרכה: הוכיחו ראשית שלכל $n$ טבעי מתקיים $\frac{x_{n+1}}{x_n}\ge\frac{1}{2}$.

**11)** הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

א. נתונה סדרה $x_n$.

אם $\lim_{n\to\infty}|x_{n+1}-x_n|=0$, אז $x_n$ מתכנסת.

ב. אם לכל $n$ מתקיים $|x_{n+2}-x_{n+1}|<|x_{n+1}-x_n|$, אז הסדרה $x_n$ מתכנסת.

ג. אם סדרה $x_n$ מקיימת את תנאי קושי, אז קיים $0<\alpha<1$ כך שלכל $n$ טבעי:

$$|x_{n+2}-x_{n+1}|\le\alpha\cdot|x_{n+1}-x_n|$$

**הערה**

בשאלות **7-10** מומלץ להשתמש בטענה אותה הוכחנו בשאלה **6**.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# שאלות הוכיחו או הפריכו

**<u>הערת ניסוח</u>**

הניסוחים הבאים שקולים:

א. קיים $N$ טבעי כך שלכל $n>N$ מתקיימת הטענה X.

ב. כמעט לכל $n$ מתקיימת הטענה X.

ג. לכל $n$, פרט למספר סופי של $n$-ים, מתקיימת הטענה X.

## שאלות

בשאלות **1-13** הוכיחו או הפריכו את הטענה הנתונה:

**1)** אם $a_n$ סדרה חסומה, אז יש לה גבול.

**2)** אם $b_n$ סדרה לא חסומה, אז $\lim_{n\to\infty} b_n=\infty$ או $\lim_{n\to\infty} b_n=-\infty$.

**3)** אם $\lim_{n\to\infty}|c_n|=k$, אז $\lim_{n\to\infty} c_n=k$ או $\lim_{n\to\infty} c_n=-k$.

**4)** אם $d_n$ סדרה עולה, אז היא לא חסומה.

**5)** אם ל-$a_n$ ו-$b_n$ אין גבול, אז גם ל-$(a_n+b_n)$ וגם ל-$(a_n\cdot b_n)$ אין גבול.

**6)** אם ל-$a_n$ ו-$b_n$ אין גבול, אז גם ל-$(a_n/b_n)$ אין גבול.

**7)** אם $a_n$ מתכנסת ו-$b_n$ מתבדרת, אז $(a_n\cdot b_n)$ מתבדרת.

**8)** אם $a_n$ מתכנסת ו-$b_n$ מתבדרת, אז $(a_n\cdot b_n)$ מתכנסת.

**9)** אם $\lim_{n\to\infty} a_n^2=L$, אז $\lim_{n\to\infty} a_n=\sqrt{L}$.

**10)** אם $a_n<b_n$ לכל $n$, אז $\lim_{n\to\infty} a_n<\lim_{n\to\infty} b_n$.

**11)** אם $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ וגם $b_n$ חסומה, אז $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \infty$.

**12)** אם $\lim_{n\to\infty} a_n = k$ וגם $a_n < 1$ לכל $n$, אז $k < 1$.

**13)** אם $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$, אז $\lim_{n\to\infty} (a_n)^n = 1$.

**14)** הוכיחו או הפריכו:

א. אם כל האיברים של סדרה מתכנסת הם מספרים רציונליים, אז גם גבולה הוא מספר רציונלי.

ב. אם $a_n$ ו- $b_n$ $(b_n \neq 0)$ סדרות חסומות, אז גם הסדרה $c_n = \frac{a_n}{b_n}$ חסומה.

ג. אם $a_n$ סדרה עולה, אז גם הסדרה $b_n = (a_n)^2$ עולה.

ד. אם $\lim_{n\to\infty} a_n \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 0$, אז הסדרה $a_n$ חסומה.

ה. אם $a_n$ ו- $b_n$ סדרות חסומות, אז גם הסדרה $c_n = \frac{1}{2^{a_n}}\left(b_n^2 + 2b_n\right)$ חסומה.

ו. אם $a_n$ סדרה מתכנסת ו- $b_n$ $(b_n \neq 0)$ סדרה חסומה, אז לסדרה $(a_n b_n^2)$ יש תת-סדרה מתכנסת.

ז. אם $a_n$ סדרה מתכנסת, אז קיים $N$ טבעי, כך שלכל $n > N$ מתקיים $\left|\frac{a_n}{n} - 1\right| < \frac{1}{2}$.

ח. אם לסדרה יש גבול חלקי, אז היא חסומה.

בשאלות **15-18** הוכיחו או הפריכו את הטענה הנתונה:

**15)** אם לכל $n$ מתקיים: $a_n \in (0,1)$, $a_{n+1} < a_n^2$ אז הסדרה $a_n$ מתכנסת.

**16)** הסדרה $a_n = \frac{1-2+3-4+5-6+\ldots+(-1)^{n-1}n}{n}$ מתבדרת.

**17)** אם לכל $n$ מתקיים: $x_n \in (0,1)$, $4x_n(1-x_{n+1}) > 1$ אז הסדרה $x_n$ מתכנסת ל- $\frac{1}{2}$.

**18)** לכל מספר רציונלי קיימת סדרת מספרים אי-רציונליים השואפת אליו.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**19)** הוכיחו או הפריכו:

א. אם הסדרה $(x_n+\frac{1}{n}x_n)$ מתכנסת, אז הסדרה $x_n$ מתכנסת.

ב. אם הסדרה $\left(x_n^2+\frac{1}{n}x_n\right)$ מתכנסת, אז הסדרה $x_n$ מתכנסת.

**20)** $x_n$ סדרה של מספרים **שלמים** המקיימת $x_{n+1}\neq x_n$ לכל $n$.
הוכיחו או הפריכו:

א. הסדרה $x_n$ לא מקיימת את תנאי קושי.

ב. לסדרה $x_n$ לא יכולה להיות תת-סדרה מתכנסת.

**21)** הוכיחו או הפריכו:

א. אם $\lim_{n\to\infty}a_n=a,\ \lim_{n\to\infty}b_n=b$ ו- $a<b$, אז כמעט לכל $n$ מתקיים $a_n<b_n$.

ב. אם $\lim_{n\to\infty}a_n=a,\ \lim_{n\to\infty}b_n=b$ וכמעט לכל $n$ מתקיים $a_n\le b_n$, אז $a\le b$.

**22)** תהי $(a_n)$ סדרה מתכנסת במובן הרחב.
הוכיחו או הפריכו:

א. אם $\lim_{n\to\infty}a_n=0$, אז כמעט לכל $n$ מתקיים $a_n=0$.

ב. אם $\lim_{n\to\infty}a_n\ge 0$, אז כמעט לכל $n$ מתקיים $a_n\ge 0$.

ג. אם $\lim_{n\to\infty}a_n\neq 0$, אז כמעט לכל $n$ מתקיים $a_n\neq 0$.

ד. אם $\lim_{n\to\infty}a_n>0$, אז כמעט לכל $n$ מתקיים $a_n>0$.

**23)** הוכיחו או הפריכו:

א. אם $(a_n)$ סדרה מתכנסת ואם $a_n\le k$ לכל $n$, אז $\lim_{n\to\infty}a_n\le k$.

ב. אם $(a_n)$ סדרה מתכנסת ואם $a_n<k$ לכל $n$, אז $\lim_{n\to\infty}a_n\le k$.

**24)** תהי $(a_n)$ סדרה **חיובית**, המקיימת $a_{n+1}\le\frac{a_n-a_n^2}{2}$, לכל $n$.
הוכיחו או הפריכו: $\lim_{n\to\infty}a_n=0$.

**25)** הוכיחו או הפריכו:
אם $\lim_{n\to\infty}(a_n)^2=0$, אז $\lim_{n\to\infty}a_n=0$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**26)** נתונות שתי סדרות $(a_n)$ ו- $(b_n)$, שעבורן: $\lim_{n\to\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)=4$, $\lim_{n\to\infty}\left(a_n+b_n\right)=2$.
הוכיחו או הפריכו:

א. $a_n\to 2,\ b_n\to 0$ או $a_n\to 0,\ b_n\to 2$.

ב. $a_nb_n\to 0$

**27)** נניח שסדרה $a_n$ מקיימת $a_{2n-2}\le a_{2n}\le a_{2n+1}\le a_{2n-1}$ לכל $n$ טבעי.
הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

א. $a_n$ עולה.

ב. $a_n$ יורדת.

ג. $a_n$ מתכנסת.

ד. $a_n$ לא מתכנסת.

ה. לסדרה לכל היותר שני גבולות חלקיים.

כיצד תשתנה התשובה, אם נתון כי $a_n$ מקיימת $a_{2n-2}<a_{2n}<a_{2n+1}<a_{2n-1}$ לכל $n$ טבעי?

**28)** הסדרה $(a_n)$ מקיימת את התכונה הבאה:

$0\le a_{m+n}\le\frac{1}{2}(a_m+a_n)$ לכל $m,n$ טבעיים.

הוכיחו או הפריכו: $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=0$.

**29)** א. תהי $\left(a_n\right)$ סדרה, כך ש- $\lim_{n\to\infty}|a_n|=0$.
הוכיחו או הפריכו: $\lim_{n\to\infty}a_n=0$.

ב. תהיינה $\left(a_n\right)$ ו- $\left(b_n\right)$ סדרות, כך ש- $\lim_{n\to\infty}|a_n-b_n|=0$.
הוכיחו או הפריכו: $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n$.

**30)** נתונה הסדרה $a_n=\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$.
הוכיחו או הפריכו:

הגבול של הסדרה קיים והוא קטן מ- 3.

רמז: לכל $x\ge 0$ מתקיים $\ln(1+x)\le x$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

בשאלות **31-34** הוכיחו או הפריכו את הטענה הנתונה,
כאשר ידוע כי $(a_n)$ ו-$(b_n)$ סדרות, כך שמתקיים $\lim_{n\to\infty}(a_nb_n)=\infty$.

**31)** אם כמעט כל איברי $(a_n)$ ו-$(b_n)$ חיוביים, אז $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$ או $\lim_{n\to\infty}b_n=\infty$.

**32)** אם כמעט כל איברי $(b_n)$ חיוביים, אז גם כמעט כל איברי $(a_n)$ חיוביים.

**33)** א. $\lim_{n\to\infty}b_n\neq 0$.

ב. קיים $N>0$, כך שלכל $n>N$, מתקיים $b_n\neq 0$.

ג. אם $\lim_{n\to\infty}b_n=5$, אז $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$.

**34)** א. אם, כמעט לכל $n$, $b_n<a_n$, אז $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$.

ב. אם, כמעט לכל $n$, $0<b_n<a_n$, אז $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$.

בשאלות **35-38** הוכיחו או הפריכו את הטענה הנתונה,
כאשר ידוע כי $(a_n)$ ו-$(b_n)$ סדרות, כך שמתקיים $\lim_{n\to\infty}(a_nb_n)=1$.

**35)** א. אם כמעט כל איברי $(a_n)$ חיוביים, אז כמעט כל איברי $(b_n)$ חיוביים.

ב. אם $(a_n)$ חיובית, אז קיים $N>0$, כך ש-$b_n>\frac{1}{2a_n}$, לכל $n>N$.

**36)** אם $(a_n)$ ו-$(b_n)$ חיוביות, אז $(a_n)$ מתכנסת או $(b_n)$ מתכנסת.

**37)** א. אם $\lim_{n\to\infty}b_n=\infty$, אז $\lim_{n\to\infty}a_n=0$.

ב. אם $\lim_{n\to\infty}a_n=0$, אז $\lim_{n\to\infty}b_n=\infty$.

ג. אם $(a_n)$ חיובית ואפסה, אז $\lim_{n\to\infty}b_n=\infty$.

**38)** א. אם $\lim_{n\to\infty}a_n=L$, אז $\lim_{n\to\infty}|a_n|=|L|$.

* הערה: בסעיף זה (ורק בו) מדובר בטענה כללית שלא קשורה לנתוני השאלה.

ב. אם $\lim_{n\to\infty}|a_n|=1$, אז $\lim_{n\to\infty}|b_n|=1$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

בשאלות **39-42** הוכיחו או הפריכו את הטענה הנתונה,
כאשר ידוע כי $(a_n)$ ו-$(b_n)$ סדרות, כך שמתקיים $\lim_{n\to\infty}(a_nb_n)=0$.

**39)** א. $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ או $\lim_{n\to\infty}b_n=0$.

ב. אם, כמעט לכל $n$, $a_n>1$, אז $\lim_{n\to\infty}b_n=0$.

ג. אם קיימים אינסוף ערכי $n$, כך ש-$a_n>1$, אז $\lim_{n\to\infty}b_n=0$.

ד. קיים $N>0$, כך שלכל $n>N$, מתקיים $b_n\neq 0$.

**40)** א. אם $\lim_{n\to\infty}b_n=5$, אז $\lim_{n\to\infty}a_n=0$.

ב. אם, כמעט לכל $n$, $0<b_n<a_n$, אז $\lim_{n\to\infty}a_n=0$.

ג. אם $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$, אז $\lim_{n\to\infty}b_n=0$.

**41)** אם $\lim_{n\to\infty}b_n=1$, אז קיים $N$ טבעי, כך שלכל $n>N$ מתקיים $a_n<\frac{1}{3}$.

**42)** א. אם כמעט כל איברי $(b_n)$ חיוביים, אז $\lim_{n\to\infty}a_n\neq\infty$.

ב. אם קיים קבוע $c>0$, כך ש-$b_n\geq c$ כמעט לכל $n$, אז $\lim_{n\to\infty}a_n=0$.

**43)** הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. קיימת סדרה $(a_n)$ כך ש-$\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$ ו-$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=0$.

ב. קיימת סדרה $(a_n)$ כך ש-$\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$ ו-$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=4$.

ג. קיימת סדרה $(a_n)$ כך ש-$\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$ ו-$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=\infty$.

ד. קיימת סדרה $(a_n)$ כך ש-$\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$ ו-$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)$ לא קיים.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**44)** הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. קיימת סדרה $(a_n)$ כך ש- $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ ו- $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0$.

ב. קיימת סדרה $(a_n)$ כך ש- $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ ו- $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 4$.

ג. קיימת סדרה $(a_n)$ כך ש- $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ ו- $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \infty$.

ד. קיימת סדרה $(a_n)$ כך ש- $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ ו- $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ לא קיים.

**45)** הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. קיימת סדרה $(a_n)$ כך ש- $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ו- $\lim_{n\to\infty} n|a_n - a_{n+1}| = \infty$.

ב. קיימת סדרה $(a_n)$ כך ש- $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ו- $\lim_{n\to\infty} n^2(a_n - a_{n+1}) = \infty$.

**46)** נתונה סדרה חיובית $(a_n)$.

הוכיחו או הפריכו:

א. אם $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$, אז $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$.

ב. אם $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$, אז $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$.

הערה: תרגיל זה מלמד שמבחן השורש "חזק" ממבחן המנה במובן הבא:
כאשר מבחן המנה עובד, אז גם מבחן השורש עובד. אך ההיפך לא נכון.

**47)** נתונה סדרה חיובית $(a_n)$, וידוע כי $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ קיים.

הוכיחו או הפריכו:

א. הסדרה $(na_n)$ אינה חסומה.

ב. הסדרה $(a_{n+1} - a_n)$ חסומה.

ג. הסדרה $\sqrt[n]{a_n}$ חסומה.

ד. הסדרה $\frac{a_n}{n}$ מתכנסת.

ה. $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{2^n} = 0$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**48)** סדרה $(a_n)$ תיקרא יורדת אם היא מקיימת $a_{n+1}<a_n$ לכל $n$.
הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. אם סדרה $(a_n)$ מקיימת $|a_{n+1}|\leq|a_n|$, אז היא יורדת.

ב. אם סדרה $(a_n)$ מקיימת $|a_{n+1}|<a_n$, אז היא יורדת.

ג. אם סדרה $(a_n)$ מקיימת $a_{n+1}\leq|a_n|$, אז היא יורדת.

**49)** תהי $(a_n)$ סדרה, המקיימת $a_{n+1}-a_n>-1$ ו- $|a_n|>2$, לכל $n$ טבעי.
הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

א. אם קיים $N$ טבעי, כך ש- $a_N$ חיובי, אז $a_n>2$ לכל $n\geq N$.

ב. כמעט כל איברי $(a_n)$ חיוביים או שכל איברי $(a_n)$ שליליים.

ג. אם לכל $n$ מתקיים בנוסף $a_{n+1}<\frac{a_n}{a_1}$, אז $a_1<-1$.

**50)** תהי $(a_n)$ סדרה, כך ש- $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=0$.
הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

א. אם קיים קבוע $c>0$, כך שלכל $n$ מתקיים $|a_n|\geq c$, אז מתקיים:
כמעט כל איברי $a_n$ חיוביים או כמעט כל איברי $a_n$ שליליים.

ב. אם $|a_n|>0$ לכל $n$, אז מתקיים:
כמעט כל איברי $a_n$ חיוביים או כמעט כל איברי $a_n$ שליליים.

ג. אם לכל $n$ מתקיים $|a_n|\geq n$, אז $(a_n)$ מתכנסת במובן הרחב.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©