בעיות נבחרות באלגברה

פרק 3 - סדרות

תוכן העניינים

1. הקדמה כללית ..... (ללא ספר)
2. סדרה חשבונית 1
3. סדרה הנדסית 8
4. סדרות מעורבות 13
5. סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת 15
6. סדרת נסיגה 21

סדרה חשבונית:

סיכום כללי:

- **נוסחת האיבר הכללי:**

נוסחת האיבר הכללי של סדרה חשבונית המתחילה באיבר a_1 והפרשה הוא d

נתונה ע"י: $a_n = a_1 + d(n-1)$, כאשר: n הוא מיקום האיבר שערכו a_n בסדרה.

- **כלל נסיגה של סדרה חשבונית:**

כלל נסיגה של סדרה חשבונית a_n שהפרשה הוא d ואיברה הראשון הוא a_1

נתון ע"י: $a_{n+1} - a_n = d$.

- **נוסחת הסכום של סדרה חשבונית:**

סכום n האיברים הראשונים של סדרה חשבונית a_n שהפרשה הוא d ואיברה הראשון הוא a_1 נתון ע"י: $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$.

בהצבת נוסחת האיבר הכללי מקבלים: $S_n = \frac{n(2a_1 + d(n-1))}{2}$.

שאלות:

1) נתונה הסדרה החשבונית: $17, 11, 5, -1, -7...$.
מצא את האיבר האחרון בסדרה אם ידוע שיש בה 43 איברים.

2) בסדרה חשבונית האיבר השישי הוא 15 והאיבר העשירי הוא 31.
מצא מהו האיבר הראשון בסדרה ומהו הפרש הסדרה.

3) מצא כמה איברים יש בסדרה החשבונית: $2, 4.5, 7, 9.5, 12, 14.5, ..., 49.5$.

4) בסדרה חשבונית סכום האיברים השני, החמישי והשמיני הוא 87 וההפרש בין האיבר השנים-עשר לאיבר השישי הוא 24.
מצא כמה איברים בסדרה אם ידוע שהאיבר האחרון בה הוא 201.

5) תחביב אחה"צ של שימי הפרעוש הוא לקפוץ על טומי הכלב. מנהגו של שימי הוא לקפוץ בדקה הראשונה 4 קפיצות ובכל דקה שאחריה לקפוץ 3 קפיצות יותר מדקה הקודמת. כמה דקות אורך תחביב אחה"צ של שימי אם ידוע שבדקה האחרונה הוא קופץ 46 קפיצות?

6) כמה מספרים תלת ספרתיים שמתחלקים ב-6 יש בין 201 ל-550?

7) כמה איברים חיוביים ישנם בסדרה החשבונית: $82,85,88,91,...$.

8) מצא את ערכו של x אם ידוע שהאיברים הבאים הם איברים עוקבים בסדרה חשבונית: $x-3,3x-4,x^2-1$.

9) נתונה סדרה המוגדרת באמצעות כלל הנסיגה הבא: $\begin{cases} a_{n+1}=a_n+3 \\ a_1=5 \end{cases}$.
הוכח שהסדרה חשבונית ומצא מהו האיבר התשעה-עשר שלה.

10) בסדרה חשבונית $a_1,a_2,a_3,...,a_n$ ידוע כי סכום ארבעת האיברים הראשונים וסכום האיברים ה-6 עד ה-9 הם מספרים נגדיים.

א. הוכח: $a_5=0$.

ב. נתון: $a_3-a_{11}=24$. מצא את a_1 ואת d.

ג. מגדירים סדרה חשבונית חדשה b_n המקיימת: $b_n=2a_n-3$.
מצא את ערך האיבר השלילי הראשון בסדרה ואת מיקומו הסידורי.

11) מצא את סכום ארבעה-עשר האיברים הראשונים בסדרה החשבונית: $-3,2,7,12,...$.

12) נתונה הסדרה החשבונית: $5,-1,-7,-13,\ldots$.
כמה איברים יש לחבר בסדרה (החל מהראשון) כדי להגיע לסכום של 987?

13) תחביב אחה"צ של מימי הפרעושה הוא לקפוץ על טומי הכלב. מנהגה של מימי הוא לקפוץ בדקה הראשונה 11 קפיצות ובכל דקה שאחריה לקפוץ 2 קפיצות יותר מדקה הקודמת. כמה דקות אורך תחביב אחה"צ של מימי אם ידוע שבכל אחה"צ היא קפצה 416 קפיצות?

14) נתונה הסדרה החשבונית: $-63,-67,-71,\ldots$.
כמה איברים לכל הפחות יש לחבר בסדרה כדי שהסכום המתקבל יהיה חיובי?

15) נתונה הסדרה החשבונית: $31,22,13,4,\ldots$.
בסדרה יש 36 איברים. חשב את סכום ארבעה-עשר האיברים האחרונים בסדרה.

16) נתונה הסדרה החשבונית: $599,\ldots,19,14,9,4$.
מחקו כל איבר שלישי בסדרה. מצא את סכום האיברים שנותרו.

17) סכום n האיברים האחרונים בסדרה חשבונית בת $3n$ איברים גדול ב- 1024 מסכום n האיברים הראשונים שבה.

א. בטא את n באמצעות הפרש הסדרה, d.

ב. נתון כי הפרש הסדרה הוא 8. כמה איברים בסדרה?

18) נתונה סדרה שבה $S_n = 2n^2 + 4n$.

א. מצא את ערכם של שלושת האיברים הראשונים בסדרה.

ב. הוכח כי הסדרה חשבונית ומצא את הפרשה.

19) בסדרה חשבונית ידוע כי סכום האיברים העומדים במקומות ה-5 , ה-7 וה- 16 הוא אפס. כמו כן ידוע כי סכום שלושת האיברים הראשונים הוא 132.

א. מצא את האיבר הראשון בסדרה ואת הפרש הסדרה.

ב. מצא את האיבר השלילי הראשון בסדרה.

ג. מצא כמה איברים יש לחבר (החל מהאיבר הראשון) כדי לקבל סכום 210.

20) נתונים שני טורים חשבוניים: $\begin{cases}150,144,138,...\\90,93,96,...\end{cases}$.

לשני הטורים אותו מספר איברים. ידוע כי סכום האיברים האחרונים של שני הטורים (האיבר האחרון מהטור הראשון והאיבר אחרון מהטור השני) הוא אפס.

א. מצא את מספר האיברים שבכל טור.

ב. מחברים את n האיברים הראשונים מהטור הראשון יחד עם n האיברים הראשונים מהטור השני. ידוע כי חיבור הסכומים הוא 3480. מצא את n אם ידוע שהוא קטן מ-20.

21) נתונות שתי סדרות חשבוניות הבאות: a_n שהפרשה הוא d_1 ו- b_n שהפרשה הוא d_2. ידוע כי: $d_1=-2d_2$.

סכום 50 האיברים הראשונים של שתי הסדרות שווה והאיבר העומד במקום ה-20 בסדרה a_n גדול ב-1 מהאיבר העומד במקום ה-37 בסדרה b_n.

א. מצא את הפרש הסדרה a_n - d_1.

ב. ידוע כי האיבר a_{10} קטן ב-1 מ-5 פעמים האיבר b_{50}.

מצא את a_1 ואת b_1.

22) נתונה הסדרה החשבונית: $-13,-17,-21,...$.

בסדרה יש 18 איברים. חשב את סכום האיברים הנמצאים במקומות האי-זוגיים ואת סכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים.

23) בסדרה חשבונית שהפרשה d ובה $2n$ איברים סכום האיברים במקומות האי-זוגיים הוא 552 וסכום האיברים במקומות הזוגיים הוא 612.

הוכח כי $nd=60$.

24) בסדרה חשבונית עולה, שכל איבריה חיוביים ובה מספר אי-זוגי של איברים, גדול סכום כל איברי הסדרה פי $1\frac{14}{15}$ מסכום איברי הסדרה הנמצאים במקומות האי-זוגיים. כמה איברים יש בסדרה?

25) לפניך שלושה איברים סמוכים בסדרה חשבונית: $x-5$, $x-16$, $2x+23$.

א. ענה על הסעיפים הבאים:

i. מצא את x.

ii. מצא את הפרש הסדרה.

ב. ידוע כי: $a_{12}=0$. מצא את a_1.

ג. האיבר האחרון בסדרה הוא: $a_n=308$.

מצא את סכום כל האיברים החיוביים העומדים במקומות האי-זוגיים.

26) בסדרה חשבונית שבה מספר זוגי של איברים נתון כי סכום ריבועי האיברים העומדים במקומות ה-4 וה-5 שווה לריבוע האיבר העומד במקום ה-6.
האיבר הראשון אינו אפס.

א. הוכח את הטענות הבאות:

i. $a_1=-4d$.

ii. $S_9=0$.

ב. האיבר העומד במקום ה-6 גדול ב-2 מהאיבר העומד במקום ה-5.
מצא את a_1 ואת d.

ג. מצא את מספר איברי הסדרה אם ידוע כי סכום האיברים העומדים במקומות הזוגיים הוא 504.

27) בסדרה חשבונית שבה $2n$ איברים ידוע כי סכום כל האיברים גדול ב-66 מפעמיים סכום האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים.

א. הוכח כי $nd=66$.

ב. ידוע כי הפרש הסדרה הוא 3. הבע באמצעות a_1 את סכום n האיברים הראשונים.

ג. סכום n האיברים הראשונים הוא 187. מצא את האיבר החיובי הקטן ביותר בסדרה ואת מיקומו הסידורי בסדרה.

28) אדם המעוניין לקנות רכב קיבל שתי הצעות מחיר.
ההצעה הראשונה:
לשלם בתשלום הראשון 1000 ₪ ובכל תשלום שאחריו סכום הגדול ב-500 ₪ מהתשלום הקודם.
ההצעה השנייה:
לשלם בתשלום הראשון 7200 ₪ ובכל תשלום שאחריו סכום הקטן ב-450 ₪ מהתשלום הקודם.
ידוע כי מספר התשלומים בהצעה השנייה קטן ב-4 ממספר התשלומים שבהצעה הראשונה.

א. כמה תשלומים יצטרך לשלם לפי כל הצעה.

ב. מה מחיר הרכב?

תשובות סופיות:

1) $a_{43}=-235$.

2) $a_1=-5\,,\,d=4$.

3) 20 איברים.

4) 48 איברים.

5) 15 קפיצות.

6) 58 מספרים.

7) 31 איברים חיוביים.

8) $x=1\,,\,x=4$.

9) $a_{19}=59$.

10) א. הוכחה. ב. $a_1=12\,,\,d=-3$ ג. $b_5=-3$.

11) $S_{14}=413$.

12) 21 איברים.

13) 16 דקות.

14) 37 איברים.

15) 3647.

16) 23920.

17) א. $n=\sqrt{\frac{512}{d}}$ ב. 24 איברים.

18) א. $a_1=6\,,\,a_2=10\,,\,a_3=14$ ב. $d=4$.

19) א. $a_1=50\,,\,d=-6$ ב. $a_{10}=-4$ ג. $n=6$.

20) א. $n=81$ ב. $n=16$.

21) א. $d_1=4$ ב. $a_1=-52\,,\,b_1=95$.

22) אי-זוגיים: $S=99$ זוגיים: $S=135$.

23) שאלת הוכחה.

24) 29 איברים.

25) א. i. $x=-50$ ii. $d=11$ ב. $a_1=-121$ ג. $S=2156$.

26) א. הוכחה. ב. $a_1=-8\,,\,d=2$ ג. $n=36$.

27) א. הוכחה. ב. $S=22a_1+693$ ג. $a_9=1$.

28) א. 12 לפי ההצעה הראשונה ו-8 לפי ההצעה השנייה. ב. 45000 ₪.

סדרה הנדסית:

סיכום כללי:

- **נוסחת האיבר הכללי:**

נוסחת האיבר הכללי של סדרה הנדסית המתחילה באיבר a_1 ומנתה היא q
נתונה ע"י הנוסחה: $a_n = a_1 q^{n-1}$, כאשר: n הוא מיקום האיבר שערכו a_n בסדרה.

- **כלל נסיגה של סדרה הנדסית:**

כלל נסיגה של סדרה הנדסית a_n שמנתה היא q ואיברה הראשון הוא a_1
נתון ע"י הקשר הבא: $a_{n+1} = a_n \cdot q$.

- **נוסחת הסכום של סדרה הנדסית:**

סכום n האיברים הראשונים של סדרה הנדסית a_n שמנתה היא q ואיברה הראשון הוא a_1 נתון ע"י: $S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q-1}$.

שאלות:

1) נתונה הסדרה ההנדסית: $\frac{1}{9}, \frac{1}{3}, 1, 3, \ldots$.
מצא את האיבר האחרון בסדרה אם ידוע שיש בה 9 איברים.

2) מצא כמה איברים יש בסדרה ההנדסית: $\frac{9}{64}, \frac{3}{16}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{64}{81}$.

3) בסדרה הנדסית האיבר השישי הוא 8 והאיבר העשירי הוא 128.
מצא מהו האיבר הראשון בסדרה ומהי מנת הסדרה.

4) בסדרה הנדסית ההפרש בין האיבר השביעי לאיבר החמישי הוא 432 וההפרש בין האיבר החמישי לשלישי הוא 48. מצא מהו האיבר הראשון בסדרה ומהי מנת הסדרה.

5) בסדרה הנדסית עולה ההפרש בין האיבר השמיני לאיבר הרביעי הוא 3120 וסכום האיברים השני והרביעי הוא 5.2.
מצא מהו האיבר הראשון בסדרה ומהי מנת הסדרה.

6) תחביב אחה"צ של שימי הפרעוש הוא לקפוץ על טומי הכלב. מנהגו של שימי הוא לקפוץ בדקה הראשונה 4 קפיצות ובכל דקה שאחריה לקפוץ פי 3 קפיצות מדקה הקודמת. כמה דקות אורך תחביב אחה"צ של שימי אם ידוע שבדקה האחרונה הוא קופץ 324 קפיצות?

7) מצא את ערכו של x אם ידוע שהאיברים הבאים הם איברים עוקבים בסדרה הנדסית: $x-6,\ x+4,\ 4x+1$. מצא גם את מנת הסדרה.

8) נתונה סדרה המוגדרת באמצעות כלל הנסיגה הבא: $\begin{cases} a_{n+1}=2a_n \\ a_1=3 \end{cases}$.
הוכח שהסדרה הנדסית ומצא מהו האיבר השמיני בה.

9) מצא את סכום תשעת האיברים הראשונים בסדרה ההנדסית: $5,\ 10,\ 20,\ 40,\ldots$.

10) תחביב אחה"צ של מימי הפרעושה הוא לקפוץ על טומי הכלב. מנהגה של מימי הוא לקפוץ בדקה הראשונה 2 קפיצות ובכל דקה שאחריה לקפוץ פי 5 קפיצות מדקה הקודמת. כמה דקות אורך תחביב אחה"צ של מימי אם ידוע שבכל אחה"צ היא קפצה 1562 קפיצות?

11) סכום n האיברים האחרונים בסדרה הנדסית בת $3n$ איברים שמנתה 2, גדול פי 256 מסכום n האיברים הראשונים בה. כמה איברים בסדרה?

12) בסדרה הנדסית עולה שבה n איברים, סכום $n-3$ האיברים האחרונים גדול פי 8 מסכום $n-3$ האיברים הראשונים בה. מצא את מנת הסדרה.

13) סכום כל האיברים בסדרה הנדסית הוא 252. האיבר האחרון בסדרה גדול ב- 120 מהאיבר השני בה. מצא כמה איברים יש בסדרה אם ידוע שמנתה 2.

14) המספרים: $2x-3\ ,\ x-9\ ,\ x-13$ הם שלושת האיברים הראשונים בסדרה הנדסית עולה שכל איבריה חיוביים.

א. מצא את x.

ב. ענה על הסעיפים הבאים:

i. כתוב את נוסחת האיבר הכללי בסדרה זו.

ii. מצא שני איברים סמוכים בסדרה שסכומם הוא 18750.

ג. ידוע כי האיבר האחרון בסדרה הוא: $a_n=5^{11}$.
מצא את סכום 7 האיברים האחרונים בסדרה.

15) נתונה הסדרה ההנדסית הבאה: a_{n+1} ,...., $36\ ,\ 12\ ,\ 4$. מוסיפים לכל איבר בסדרה זו שישית מהאיבר הבא אחריו ויוצרים סדרה חדשה b_n באופן הבא:

$$b_1=a_1+\frac{a_2}{6}\ \ ,\ \ b_2=a_2+\frac{a_3}{6}\ \ ,\ \ b_3=a_3+\frac{a_4}{6}\ \ ,\ .....\ ,\ \ b_n=a_n+\frac{a_{n+1}}{6}$$

א. הוכח כי הסדרה b_n היא סדרה הנדסית ומצא את מנתה.

ב. הראה כי היחס בין סכום n האיברים הראשונים של הסדרה a_n
ובין סכום n האיברים הראשונים של הסדרה b_n הוא $\frac{2}{3}$.

ג. מצא שני איברים סמוכים בסדרה b_n שסכומם מהווה $\frac{2}{9}$ מ-a_8.

16) נתונה הסדרה ההנדסית: $7,14,28,...$.
בסדרה יש 8 איברים. חשב את סכום האיברים הנמצאים במקומות האי-זוגיים ואת סכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים.

17) בסדרה הנדסית ובה $2n$ איברים סכום האיברים במקומות הזוגיים גדול פי 4 מסכום האיברים במקומות האי-זוגיים. חשב את מנת הסדרה.

18) נתונה סדרה הנדסית שמנתה q ובה מספר זוגי של איברים.
בטא באמצעות q את היחס בין סכום איברי הסדרה כולה לסכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים שבה.

19) בסדרה הנדסית שבה $2n+1$ איברים, סכום n האיברים הראשונים קטן פי 9 מסכום n האיברים הבאים אחריהם. האיבר האחרון בסדרה גדול ב-30 מהאיבר הראשון שבה. מצא את האיבר הראשון בסדרה.

20) ענה על הסעיפים הבאים:

א. הראה כי בסדרה הנדסית שבה $2n$ איברים היחס בין סכום האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים לבין סכום כל איברי הסדרה תלוי במנת בסדרה.

בסדרה הנדסית שבה מספר זוגי של איברים ידוע כי סכום כל האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים קטן פי 4 מסכום כל איברי הסדרה. האיבר הראשון בסדרה זו קטן ב-2 ממנת הסדרה.

ב. כתוב נוסחה לאיבר כללי של סדרה זו.

ג. מצא שני איברים סמוכים בסדרה שסכומם הוא 324.

21) בסדרה הנדסית שבה 12 איברים סכום כל איברי הסדרה גדול פי 3 מסכום האיברים כאשר מחליפים את סימני כל האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים.

א. מצא את מנת הסדרה.

ב. ידוע כי ההפרש בין האיבר החמישי לאיבר הרביעי בסדרה הוא 8. מצא את האיבר הראשון בסדרה.

ג. חשב את סכום כל האיברים העומדים במקומות הזוגיים בסדרה.

22) באחת ממדינות המזרח היה מלך שאהב משחקי חשיבה. לכבוד יום הולדתו הכין לו השר הבכיר שבממלכתו משחק מיוחד המכיל 25 משבצות ו-2 חיילי משחק. המלך, מרוב התלהבות ושמחה לא ידע כיצד לגמול לשר החכם ושאל אותו מה ירצה בתמורה. השר סרב לקבל דבר על מתנתו עד שלבסוף החליט המלך לתת לשר מחצית מכל אוצרות הממלכה המונים כ-40 מיליון אבנים יקרות. לאחר ששמע על כך השר, הוא החליט לאתגר את המלך והעלה את ההצעה הבאה:

תן לי אבן יקרה אחת והכפל אותה בכל משבצת שבמשבצות המשחק באופן הבא: כנגד המשבצת הראשונה - אבן אחת,
כנגד השנייה - שתי אבנים,
כנגד השלישית - ארבע אבנים וכן הלאה...
המלך הסכים להצעה.

א. כמה אבנים המלך ייתן לשר כנגד המשבצת האחרונה במשחק?

ב. העזר בכמות האבנים שברשותו של השר וקבע האם הצעתו שוות-ערך יותר מהחלטת המלך לתת לו מחצית מאוצרות הממלכה.

ג. סמוך לפני שנתן המלך את האבנים לשר, הציעה בתו של המלך הצעה נוספת והיא: תן עבור כל משבצת זוגית 2^n אבנים, כאשר n הוא מספר המשבצת. האם כדאי למלך לקבל את הצעת בתו או להישאר עם ההצעה המקורית של השר?

תשובות סופיות:

1) $a_9 = 729$.

2) $n = 7$.

3) $a_1 = \pm\frac{1}{4}, q = \pm 2$.

4) $a_1 = \frac{2}{3}, q = \pm 3$.

5) $a_1 = \frac{1}{25}, q = 5$.

6) 5 דקות.

7) $x = 11 \to q = 3$, $x = -\frac{2}{3} \to q = -\frac{1}{2}$.

8) $a_8 = 384$.

9) $S_9 = 2555$.

10) 5 דקות.

11) $n = 4$, יש 12 איברים בסדרה.

12) $q = 2$.

13) $n = 6$.

14) א. $x = 14$ ב.i. $a_n = 5^{n-1}$ ב.ii. a_6 , a_7 ג. $S_7^* = 61,034,375$.

15) א. $q = 3$. ג. b_5 , b_6

16) אי-זוגיים: $S = 595$, זוגיים: $S = 1190$.

17) $q = 4$.

18) $\frac{q+1}{q}$.

19) $a_1 = \frac{3}{8}$.

20) א. $\frac{S_{n(o)}}{S_{2n}} = \frac{1}{q+1}$ ב. $a_n = 3^{n-1}$ ג. a_5 , a_6.

21) א. $q = 2$ ב. $a_1 = 1$ ג. $S_{6(p)} = 2730$.

22) א. $a_{25} = 16,777,216$

ב. לפי הצעת השר יהיו לו 33,554,431 אבנים ולפי הצעת המלך יהיו לו 20,000,000 אבנים.

ג. $4,16,64,...,2^{24}$, $S_n = 22,369,620$.

סדרות מעורבות:

שאלות:

1) נתונים שלושה איברים עוקבים בסדרה הנדסית שמנתה 3.
אם נכפול את המספר הראשון ב-3, נוסיף למספר השני 4 ונחסיר מהמספר השלישי 4 תתקבל סדרה חשבונית. מצא את המספרים.

2) נתונות שתי סדרות שמתחילות במספר 2 ובשתיהן 3 איברים.
סדרה אחת היא חשבונית והשנייה הנדסית. האיבר השלישי בשתי הסדרות זהה והאיבר השני בסדרה ההנדסית קטן ב-4 מהאיבר השני בסדרה החשבונית.
מצא את מנת הסדרה ההנדסית.

3) נתונים ארבעה מספרים בעלי התכונות הבאות:
הראשון, השני והרביעי מהווים שלושה איברים עוקבים בסדרה הנדסית שמנתה 2.
הראשון, השלישי והרביעי מהווים שלושה איברים עוקבים בסדרה חשבונית וסכומם $22\frac{1}{2}$. מצא את ארבעת המספרים.

4) ההפרש של סדרה חשבונית שווה למנה של סדרה הנדסית עולה.
האיבר הראשון בסדרה ההנדסית הוא 6 וידוע כי סכום 2 האיברים הראשונים בסדרה החשבונית שווה לסכום שני האיברים הראשונים בסדרה ההנדסית.
האיבר השלישי בסדרה ההנדסית גדול פי 2 מהאיבר השלישי בסדרה החשבונית.

א. מצא את שלושת האיברים של הסדרה החשבונית.

ב. מצא כמה איברים יש לחבר בסדרה החשבונית החל מהאיבר הראשון כדי לקבל את הסכום 60.

ג. מצא את מיקומו הסידורי של איבר בסדרה ההנדסית הגדול פי 12 מהאיבר האחרון שחובר בסכום הסדרה החשבונית שחישבת בסעיף הקודם.

5) נתונות שתי הסדרות הבאות: סדרה חשבונית: $a_1 , a_2 , a_3 , ...$
וסדרה הנדסית: $b_1 , b_2 , b_3 , ...$. ידוע כי האיבר הראשון בשתי הסדרות שווה.
האיבר השלישי בסדרה ההנדסית גדול פי 4 מהאיבר הראשון בסדרה החשבונית.

א. מצא את מנת הסדרה ההנדסית אם ידוע כי היא אינה עולה.

ב. נתון גם כי האיבר החמישי בסדרה ההנדסית שווה לאיבר הרביעי בסדרה החשבונית. הוכח כי הפרש הסדרה החשבונית גדול פי 5 מהאיבר הראשון.

ג. בכל סדרה יש 10 איברים. הסכום של כל האיברים של שתי הסדרות יחד הוא 212-. מצא את האיבר הראשון של שתי הסדרות.

תשובות סופיות:

1) המספרים הם: 18, 6, 2.

2) $q=-1$ או $q=3$.

3) המספרים הם: 12 , 7.5 , 6 , 3.

4) א. 12, 10, 8 ב. 5 ג. 6.

5) א. $q=-2$ ג. $a_1=2$.

סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת:

סיכום כללי:

- **הגדרה:**

סדרה הנדסית a_n המקיימת: $|q|<1$, $(q\neq 0)$ נקראת סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת.

- **נוסחת הסכום של סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת:**

הסכום של סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת a_n ניתן לחישוב ע"י שימוש בכלל: $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ והצבתו בנוסחת הסכום של סדרה הנדסית.

מתקבל הכלל הבא: $S=\frac{a_1}{1-q}$.

- **סכום סופי של איברים בסדרה הנדסית אינסופית מתכנסת:**

  - כאשר מתבקשים לחשב סכום של n איברים ראשונים בסדרה הנדסית אינסופית מתכנסת יש להשתמש בנוסחת הסכום הרגילה: $S_n=\frac{a_1\left(q^n-1\right)}{q-1}$.

  - כאשר מתבקשים לחשב סכום של n איברים בסדרה הנדסית אינסופית מתכנסת המתחילים באיבר a_k יש להשתמש בנוסחת הסכום הרגילה באופן הבא: $S_n=\frac{a_k\left(q^n-1\right)}{q-1}$.

שאלות:

1) מצא את סכום כל איברי הסדרה ההנדסית הבאה: $12\ ,\ 4\ ,\ 1\frac{1}{3}\ ,\ \ldots$

2) סכום כל איברי סדרה הנדסית אינסופית שמנתה $\frac{1}{4}$ הוא 32.
מצא את האיבר הראשון בסדרה.

3) נתונה סדרה הנדסית אינסופית יורדת שסכומה 62.5. ידוע כי האיבר השני בסדרה הוא 10. מצא את האיבר הראשון ואת מנת הסדרה (שתי אפשרויות).

4) האיבר הראשון בסדרה הנדסית אינסופית יורדת הוא 14. סכום האיברים במקומות הזוגיים הוא $9\frac{1}{3}$. מצא את סכום האיברים במקומות האי-זוגיים.

***הערה: שתי השאלות הבאות מסכמות את סוגי הסכומים וייצוג סדרות שונות באמצעות סדרה נתונה כפי שמקובל בנושא זה ואינן מייצגות אורך של שאלת בגרות.**

5) נתונה סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת a_n שמנתה q , $\left(q\neq 0\ ,\ |q|<1\right)$
מגדירים שלוש סדרות חדשות: b_n , c_n ו- d_n באופן הבא:

הסדרה:	b_n	c_n	d_n
הכלל:	$b_1=a_1$ $b_2=a_1+a_2$ $b_3=a_1+a_2+a_3$ $\vdots$ $b_n=a_1+a_2+a_3+..+a_n=S_{a(n)}$	$c_1=a_2^2-a_1^2$ $c_2=a_3^2-a_2^2$ $c_3=a_4^2-a_3^2$ $\vdots$ $c_n=a_{n+1}^2-a_n^2$	$d_1=S_a+a_1$ $d_2=S_a+a_2$ $d_3=S_a+a_3$ $\vdots$ $d_n=S_a+a_n$

הסכום S_a הוא סכום הסדרה a_n , והסכום: $S_{a(n)}$ הוא סכום n האיברים הראשונים של הסדרה a_n.

א. קבע אלו מבין הסדרות b_n , c_n ו- d_n הן הנדסיות והבע את מנתן ע"י q.

ב. הבע באמצעות a_1 בלבד את סכום הסדרה ההנדסית שמצאת בסעיף הקודם.

ג. מסמנים את סכום ריבועי האיברים של הסדרה ההנדסית שמצאת בסעיף א' ב- $S_{(S)}$. הוכח כי לא קיים ערך של q עבורו סכום ריבועי האיברים $S_{(S)}$, שווה לסכום הסדרה הנ"ל בריבוע.

6) נתונה סדרה הנדסית אינסופית יורדת: a_n שמנתה q.
מגדירים סדרה חדשה b_n באופן הבא:

$$b_1 = S_1^* = \frac{a_1}{1-q} \quad , b_2 = S_2^* = \frac{a_2}{1-q} \quad , b_3 = S_3^* = \frac{a_3}{1-q} \quad ,..., b_n = S_n^* = \frac{a_n}{1-q} \quad ,..$$

כאשר: S_n^* מייצג את סכום הסדרה a_n החל מהאיבר a_n (ועד אינסוף).

א. הוכח כי הסדרה b_n היא גם הנדסית אינסופית יורדת וכתוב את נוסחת האיבר הכללי שלה באמצעות a_1 ו- q.

ב. ידוע כי סכום הסדרה b_n הוא 126 וכי סכום 8 האיברים הראשונים בסדרה a_n גדול פי 6560 מהאיבר התשיעי בסדרה b_n. מצא את a_1 ו- q.

ג. היעזר בסעיף הקודם והוכח כי מתקיים: $b_2 + b_3 + ... + b_n + ... = 42$.

ד. חשב את סכום האיברים העומדים במקומות הזוגיים בסדרה b_n.

ה. חשב את סכום האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים בסדרה b_n.

ו. מחליפים את סימני האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים בסדרה b_n כך שנוצרת הסדרה: b_n^*. חשב את סכום הסדרה b_n^*.

ז. מחליפים את סימני האיברים העומדים במקומות הזוגיים בסדרה b_n כך שנוצרת הסדרה: b_n^{**}. חשב את סכום הסדרה b_n^{**}.

ח. מעלים בריבוע את כל איברי הסדרה b_n. מסמנים את הסכום המתקבל ב- $S_{(S)}$ (מלשון: square). כמו כן, מסמנים את סכום הסדרה המקורית b_n ב- S_b.
הראה כי: $S_b^2 \neq S_{(S)}$.

ט. הוכח כי היחס בין סכום איברי הסדרה a_n וסכום איברי הסדרה b_n הוא $\frac{2}{3}$.

7) נתונה סדרה הנדסית אינסופית יורדת שסכומה 24. מאיברי הסדרה הנתונה יצרו את סדרה חדשה באופן הבא: $a_1+a_2, a_2+a_3, a_3+a_4, a_4+a_5, \ldots$.

א. הוכח שהסדרה החדשה היא הנדסית אינסופית יורדת.

ב. ידוע שסכום כל איברי הסדרה החדשה הוא 32.
מצא את האיבר הראשון והמנה של הסדרה המקורית.

8) בסדרה הנדסית אינסופית יורדת a_n ידוע כי סכום האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים גדול פי $1\frac{2}{3}$ מסכום האיברים העומדים במקומות הזוגיים.

א. מצא את מנת הסדרה.

מחברים כל שני איברים סמוכים בסדרה הנתונה ויוצרים סדרה חדשה b_n.

ב. הוכח כי הסדרה b_n גם היא הנדסית יורדת ומצא את מנתה.

ג. הראה כי סכום הסדרה b_n שווה לסכום הסדרה a_n.

ד. סכום שתי הסדרות יחד הוא 1000. מצא את האיבר הראשון בסדרה a_n.

9) נתונה סדרה הנדסית אינסופית $a_1, a_2, a_3, \ldots$ שמנתה היא q, $(0<q<1)$.
נגדיר את הסכומים הבאים: $V=a_3+a_7+a_{11}+\ldots$, $T=a_1+a_2+a_5+a_6+a_9+a_{10}+\ldots$.
נתון כי: $T=6V$.

א. מצא את מנת הסדרה q.

ב. פי כמה קטן V מסכום כל האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים בסדרה?

ג. מצא את האיבר הראשון אם ידוע כי סכום האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים הוא $1365\frac{1}{3}$.

10) נתונה הסדרה ההנדסית הבאה: $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2n}$ שמנתה היא q.
בונים סדרה חדשה מריבועי כל האיברים הסדרה באופן הבא: $a_1^2, a_2^2, a_3^2, \ldots, a_{2n}^2$.

א. הוכח כי היחס בין סכום n האיברים הראשונים בסדרת הריבועים ובין סכום כל האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים בסדרה הנתונה תלוי רק באיבר הראשון של הסדרה.
בסדרה הנדסית אינסופית יורדת שסכומה 640 ידוע כי סכום 10 האיברים הראשונים כאשר מעלים אותם בריבוע גדול פי 320 מסכום 10 האיברים הראשונים העומדים במקומות האי-זוגיים בסדרה.

ב. מצא את מנת הסדרה.

ג. מחברים את כל איברי הסדרה החל מאיבר a_n כלשהו.
ידוע כי סכום זה קטן פי 16 מסכום הסדרה המקורי. מצא את האיבר a_n.

11) נתונה סדרה הנדסית אינסופית $a_1 , a_2 , a_3 , ...$ שמנתה היא q , $(q \neq 0 , |q|<1)$.

נגדיר את הסכומים הבאים: $V = a_2 + a_7 + a_{12} + ... , .. , T = a_1 + a_3 + a_6 + a_8 + a_{11} + a_{13}$.

נתון כי: $V = 0.3T$.

א. מצא את מנת הסדרה q.

מחליפים את הסימנים של כל האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים ומתקבלת סדרה חדשה שסכומה הוא 12.

ב. מצא את האיבר הראשון בסדרה המקורית.

ג. מעלים את כל איברי הסדרה בריבוע. חשב את סכום הסדרה כעת.

תשובות סופיות:

1) $S=18$.

2) $a_1=24$.

3) $a_1=50\ ,\ q=\frac{1}{5}$ או $a_1=12\frac{1}{2}\ ,\ q=\frac{4}{5}$.

4) $S=18\frac{2}{3}$.

5) א. הסדרה b_n :
$$\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{S_{n+1}}{S_n}=\frac{S_{n+1}}{S_n}=\frac{\frac{a_{n+1}\left(q^{n+1}-1\right)}{q-1}}{\frac{a_n\left(q^n-1\right)}{q-1}}=\frac{a_{n+1}\left(q^{n+1}-1\right)}{a_n\left(q^n-1\right)}=q\cdot\frac{q^{n+1}-1}{q^n-1}$$
היות והיא תלויה ב-n היא אינה הנדסית.

הסדרה c_n הנדסית :
$$\frac{c_{n+1}}{c_n}=\frac{a_{n+2}^2-a_{n+1}^2}{a_{n+1}^2-a_n^2}=\frac{a_n^2q^4-a_n^2q^2}{a_n^2q^2-a_n^2}=\frac{a_n^2q^2\left(q^2-1\right)}{a_n^2\left(q^2-1\right)}=q^2 .$$

הסדרה d_n :
$$\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{S+a_{n+1}}{S+a_n}=\frac{\frac{a_1}{1-q}+a_{n+1}}{\frac{a_1}{1-q}+a_n}=\frac{a_1+(1-q)a_{n+1}}{a_1+(1-q)a_n}=\frac{a_1\left(1+(1-q)q^n\right)}{a_1\left(1+(1-q)q^{n-1}\right)}=\frac{q^n-q^{n+1}+1}{q^{n-1}-q^n+1}$$

היות והיא תלויה ב-n היא אינה הנדסית. ב. $-a_1^2$.
$$S_{(c_n)}=\frac{c_1}{1-q_c}=\frac{a_2^2-a_1^2}{1-q^2}=\frac{a_1^2\left(q^2-1\right)}{1-q^2}=-a_1^2 .$$

ג. מההשוואה : $S_{(s)}=S^2$ מקבלים כי פתרון המשוואה הוא : $q=0,\pm1$.
כולם נפסלים מכיוון שמנת הסדרה הנתונה a_n היא שבר.
עבור $|q|>1$ הסדרות אינן מתכנסות ולכן לא קיים ערך של q עבורו השוויון יתקיים. משי"ל.

6) א. $b_n=\frac{a_1}{1-q}q^{n-1}$ ב. $a_1=56\ ,\ q=\frac{1}{3}$ ג. הוכחה. ד. 31.5
ה. 94.5 ו. -63 ז. 63 ח. 7938
ט. הסכום : S^2 משמעו : $\left(b_1+b_2+...+b_n+..\right)^2$.
הסכום : $S_{(s)}$ משמעו : $b_1^2+b_2^2+...+b_n^2+..$. ברור כי הביטויים אינם שווים.

7) א. הוכחה. ב. $a_1=16\ ,\ q=\frac{1}{3}$.

8) א. $q=0.6$ ב. $\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{a_{2n+1}+a_{2n+2}}{a_{2n-1}+a_{2n}}=q^2$ ד. $a_1=200$

9) א. $q=\frac{1}{2}$ ב. פי 5 ג. $a_1=1024$

10) א. הוכחה. ב. $q=0.5$ ג. $a_5=20$.

11) א. $q=\frac{1}{3}$ ב. $a_1=-16$ ג. $S=288$.

סדרת נסיגה:

שאלות:

1) נתונה סדרה המוגדרת על פי כלל הנסיגה הבא: $\begin{cases} a_{n+1}=a_n+2n-11 \\ a_1=-6 \end{cases}$.

א. מצא את האיבר השלישי בסדרה.

ב. נתון כי האיבר השלושה-עשר בסדרה הוא 18. מצא את a_{14} ו- a_{12}.

ג. נתון כי האיבר השלושים ואחת בסדרה הוא k.
הבע באמצעות k את a_{32} ו- a_{30}.

ד. מצא את מיקומם של שני איברים סמוכים בסדרה שההפרש ביניהם הוא 133.

ה. הסבר מדוע אין שני איברים סמוכים בסדרה שההפרש ביניהם הוא 62.

2) נתונה סדרה המוגדרת על פי כלל הנסיגה הבא: $\begin{cases} a_{n+1}=a_n+2n \\ a_1=0 \end{cases}$.

נתון כי $a_k=72$. הבע באמצעות k את a_{k+2}.

3) נתונה סדרה המוגדרת על פי כלל הנסיגה הבא: $\begin{cases} a_{n+1}=2a_n+n^2-31 \\ a_7=t \end{cases}$

מצא את ערכו של t שבעבורו האיברים a_7, a_8, a_9 הם איברים עוקבים בסדרה חשבונית.

4) סדרה שהאיבר הכללי בה הוא a_n מוגדרת על פי כלל הנסיגה הבא: $a_{n+1}=a_n+6n-2$
מגדירים סדרה חדשה שהאיבר הכללי בה הוא b_n באופן הבא: $b_n=a_{n+1}-a_n$.

א. הוכח שהסדרה b_n היא סדרה חשבונית ומצא את הפרשה.

ב. חשב את b_1.

5) סדרה שהאיבר הכללי בה הוא a_n מוגדרת על פי כלל הנסיגה הבא: $a_{n+1}=3a_n+4$.
מגדירים סדרה חדשה שהאיבר הכללי בה הוא b_n באופן הבא: $b_n=a_n+2$.

א. הוכח שהסדרה b_n היא סדרה הנדסית ומצא את מנתה.

ב. נתון: $b_5=162$. חשב את a_1.

6) סדרה מוגדרת ע"י הכלל: $a_1=3\ ,\ a_{n+1}=3a_n+10n-5$.
מגדירים סדרה חדשה המקיימת לכל n טבעי: $b_n=a_n+5n$.

א. הוכח כי הסדרה b_n היא סדרה הנדסית.

ב. חשב את האיבר b_5.

ג. חשב את הסכום: $b_2+b_4+b_6+.....+b_{12}$.

7) סדרה מוגדרת לכל n טבעי ע"י הנוסחה: $a_1=k\ ,\ a_{n+1}=8n-a_n+3$.

א. הבע באמצעות k את ארבעת האיברים הראשונים בסדרה.

ב. הוכח כי סדרת האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים וסדרת האיברים העומדים במקומות הזוגיים הן חשבוניות ומצא את הפרשן.

ג. חשב את סכום 20 האיברים הראשונים בסדרה.

8) סדרה מוגדרת ע"י כלל הנסיגה הבא: $a_1=2\ ,\ a_{n+1}=\dfrac{3a_n}{2a_n+3}$.

מגדירים סדרה חדשה לפי: $b_n=\dfrac{4-7a_n}{a_n}$.

א. הוכח כי הסדרה b_n היא חשבונית ומצא את הפרשה.

ב. חשב את הסכום הבא: $b_2+b_4+b_6+.....+b_{22}$.

9) סדרה מקיימת את כלל הנסיגה: $a_1=1\ ,\ a_{n+1}=3n-a_n-7$.

א. חשב את 5 האיברים הראשונים וקבע האם הסדרה היא חשבונית.

ב. הוכח כי לכל n טבעי מתקיים: $a_{n+2}=a_n+3$.

ג. כתוב נוסחה לסכום n האיברים הראשונים העומדים במקומות האי-זוגיים בסדרה.

ד. חשב את הסכום הבא: $a_1+a_3+a_5+.....+a_{17}$.

10) סדרה מוגדרת לפי כלל הנסיגה הבא: $a_{n+1}=a_n+2\cdot 3^n+2$.

א. ענה על הסעיפים הבאים:

i. הבע את a_{n+2} באמצעות a_n.

ii. מצא את מיקומו הסידורי של איבר הגדול ב-652 מהאיבר העומד שני מקומות לפניו.

ב. הנוסחה לסכום n האיברים הראשונים של אחת מהסדרות המיוצגות ע"י כלל הנסיגה הנ"ל היא: $S_n=1.5\cdot 3^n+n^2+n-1.5$.

חשב את הסכום הבא: $a_6+a_7+a_8+....+a_{11}$.

ג. מהו האיבר הראשון של הסדרה המיוצגת ע"י כלל הנסיגה ונוסחת הסכום הנ"ל?

11) סדרה מוגדרת ע"י כלל הנסיגה: $a_{n+1}=\frac{2a_n}{a_n+5}$, $a_1=6$.

מגדירים סדרה חדשה b_n המקיימת לכל n טבעי: $b_n=\frac{a_n+3}{a_n}$.

א. הוכח כי הסדרה b_n היא הנדסית ומצא את מנתה.

ב. כתוב נוסחה ל- b_n באמצעות n בלבד.

ג. חשב את הסכום הבא: $b_1-b_2+b_3-b_4+.....-b_{10}$.

תשובות סופיות:

1) א. $a_3=-22$ ב. $a_{14}=33\ ,\ a_{12}=5$ ג. $a_{32}=k+51\ ,\ a_{30}=k-49$

ד. a_{62}, a_{63}

2) $a_{k+2}=74+4k$

3) $t=-33$

4) א. $d=6$ ב. $b_1=4$

5) א. $q=3$ ב. $a_1=0$

6) א. $b_{n+1}=3b_n$ ב. $b_5=648$ ג. $S=1594320$

7) א. $a_1=k\ ,\ a_2=11-k\ ,\ a_3=k+8\ ,\ a_4=19-k$ ב. 8

ג. 830

8) ב. $S_{11(p)}=267\frac{2}{3}$

9) א. $a_1=1\ ,\ a_2=-5\ ,\ a_3=4\ ,\ a_4=-2\ ,\ a_5=7$ ג. $S_{n(o)}=1.5n^2-0.5n$

ד. $S_{9(o)}=117$

10) א. i. $a_{n+2}=a_n+8\cdot 3^n+4$ ii. a_4

ב. $S_{6-11}=265458$ ג. $a_1=5$.

11) א. $q=2.5$ ב. $b_n=1.5\cdot 2.5^{n-1}$ ג. $S_{10}^{*}=-4086.74$