מתמטיקה א

פרק 11 - סדרות

תוכן העניינים

תת-סדרה, גבול חלקי, משפט בולצאנו ויירשטראס

שאלות

1) חשבו את הגבולות שלהלן אם הם קיימים.
בכל מקרה שהגבול לא קיים, גם לא במובן הרחב, נמקו מדוע,
וחשבו את כל הגבולות החלקיים (גם גבולות חלקיים במובן הרחב).

א. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-3)^{5n}-2(-3)^n+2}{(-3)^{3n}+(-3)^n+2}$

ב. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-3)^{5n}-2(-3)^n+2}{(-3)^{2n}+(-3)^n+2}$

ג. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}-1\right)^n$

2) חשבו את הגבולות שלהלן אם הם קיימים.
בכל מקרה שהגבול לא קיים, גם לא במובן הרחב נמקו מדוע,
וחשבו את כל הגבולות החלקיים (גם גבולות חלקיים במובן הרחב).

א. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-n\right)$

ב. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\lfloor 4n\rfloor-4\lfloor n\rfloor\right)$

ג. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{4}-\left[\frac{n}{4}\right]\right)$

3) נתון ש- (a_n) סדרה עולה ממש של מספרים שלמים.

א. הוכיחו שקיים איבר אי-שלילי בסדרה.

ב. הוכיחו כי $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}=e$.

4) הוכיחו כי לסדרה הבאה אין גבול: $a_n=\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)$.

5) חשבו את הגבול הבא $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{n+(-1)^n}{n}\right]^n$.

6) הוכיחו כי לסדרה הבאה אין גבול: $a_1=2;\ a_{n+1}=\sqrt{11-(a_n)^2}$.

7) נתונה הסדרה a_n, המוגדרת על ידי $a_1=2;\ a_{n+1}=\frac{1}{\sqrt{a_n}}$.
הוכיחו שהסדרה מתכנסת.

8) נתונה הסדרה a_n, המוגדרת על ידי $(n\in\mathbb{N})\ a_1=0;\ a_{n+1}=\frac{1}{1+a_n}$.
הוכיחו שהסדרה מתכנסת.

9) א. הוכיחו שכל מספר המופיע אינסוף פעמים בסדרה הינו גבול חלקי של הסדרה.
ב. מצאו סדרה שיש לה אינסוף גבולות חלקיים.

10) נתונה סדרה $a_n=\sin\frac{\pi}{4}n$.
מצאו את כל הגבולות החלקיים של הסדרה ובמיוחד את $\varliminf_{n\to\infty}a_n$ ו- $\varlimsup_{n\to\infty}a_n$.

11) נתונה סדרה $a_n=n\sin\frac{\pi}{4}n$.
מצאו את כל הגבולות החלקיים של הסדרה ובמיוחד את $\varliminf_{n\to\infty}a_n$ ו- $\varlimsup_{n\to\infty}a_n$.

12) נתונה סדרה $a_n=1,1,2,1,2,3,1,2,3,4,1,2,3,4,5,\ldots$.
מצאו את כל הגבולות החלקיים של הסדרה ובמיוחד את $\varliminf_{n\to\infty}a_n$ ו- $\varlimsup_{n\to\infty}a_n$.

13) נתונה סדרה $a_n=(-1)^n\frac{n+1}{n}$.
מצאו את כל הגבולות החלקיים של הסדרה ובמיוחד את $\varliminf_{n\to\infty}a_n$ ו- $\varlimsup_{n\to\infty}a_n$.

14) נתונה סדרה $a_n=(-1)^n\cdot\sqrt[n!]{n^{40}}+\frac{1}{n^2}\sin\left(\frac{n}{4}\right)$.
מצאו את $\varliminf_{n\to\infty}a_n$ ו- $\varlimsup_{n\to\infty}a_n$.

15) נתונה סדרה a_n, ונגדיר סדרה חדשה b_n על ידי $b_n=\sqrt[n]{n}\cdot a_n$.
הוכיחו כי לשתי הסדרות אותם גבולות חלקיים.

16) תהי a_n סדרה, ונניח כי 10 ו-11 הם שני גבולות חלקיים שלה.
הוכיחו שלכל $N\in\mathbb{N}$ קיימים $m,n\in\mathbb{N}$, כך ש- $|a_m-a_n|>\frac{1}{2}$.

17) נתונה סדרה a_n.
a_{n_k} ו- a_{m_k} שתי תת-סדרות של a_n המקיימות:
1. $a_{n_k}\to L$, $a_{m_k}\to L$
2. כל איברי הסדרה a_n מופיעים בלפחות אחת מתת הסדרות הנתונות.

הוכיחו: $a_n\to L$.

הערה: טענה זו הוסברה והודגמה בסרטון "שיטה להוכחת קיום גבול לסדרה לא מונוטונית", ובעזרתה פתרנו את שאלות **4-5**.

18) נתונה סדרה חיובית a_n המקיימת $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n\cdot\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{a_n}=1$.
הוכיחו כי הסדרה מתכנסת.

19) פתרו את שני הסעיפים הבאים:
א. הוכיחו שלכל סדרה חסומה a_n, $\inf a_n\le\underline{\lim}a_n\le\overline{\lim}a_n\le\sup a_n$
הערה: $\sup a_n$ הוא החסם העליון של הקבוצה $\{a_1,a_2,...,a_n\}$.
ב. מצאו סדרה a_n שעבורה $\inf a_n<\underline{\lim}a_n<\overline{\lim}a_n<\sup a_n$.

20) הוכיחו שהסדרה a_n מתכנסת במובן הרחב אם ורק אם $\underline{\lim}a_n=\overline{\lim}a_n$.

21) הוכיחו את המשפט המפורסם הבא:
לכל שתי סדרות חסומות a_n,b_n מתקיים
א. $\overline{\lim}(a_n+b_n)\le\overline{\lim}\,a_n+\overline{\lim}\,b_n$
ב. $\underline{\lim}(a_n+b_n)\ge\underline{\lim}\,a_n+\underline{\lim}\,b_n$

22) נתונות שתי סדרות חסומות a_n ו- b_n.
קבעו האם הטענה בכל סעיף נכונה, והוכיחו זאת.
א. ייתכן שמתקיים $\overline{\lim}(a_n+b_n)<\overline{\lim}\,a_n+\overline{\lim}\,b_n$.
ב. ייתכן שמתקיים התנאי בסעיף א' ושתי הסדרות לעיל מתכנסות.
ג. ייתכן שמתקיים התנאי בסעיף א' ורק אחת מהסדרות לעיל מתכנסת.

23) יהיו (a_n) ו- (b_n) סדרות חסומות.
הוכיחו כי $\overline{\lim_{n\to\infty}}(a_n+b_n)\ge \underline{\lim_{n\to\infty}}a_n+\overline{\lim_{n\to\infty}}b_n$.

24) תהי (a_n) סדרה חסומה של מספרים חיוביים, כך ש- $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}a_n)=1$.
א. הוכיחו שאם (a_n) מתכנסת, אז $\lim_{n\to\infty}a_n=1$.
ב. הוכיחו שאם $L>0$ הוא גבול חלקי של (a_n),
אז גם $\frac{1}{L}$ הוא גבול חלקי שלה.
ג. הוכיחו שלא ייתכן ש- $L=0$ הוא גבול חלקי של (a_n).
ד. הראו, באמצעות דוגמה, שללא דרישת החסימות,
ייתכן ש- $L=0$ הוא גבול חלקי של (a_n).

25) ענו על הסעיפים הבאים:
א. הדגימו שתי סדרות חסומות ומתבדרות, (a_n) ו- (b_n),
המקיימות $\lim_{n\to\infty}a_nb_n=1$.
ב. יהיו (a_n) ו- (b_n) שתי סדרות, המקיימות $\lim_{n\to\infty}a_nb_n=1$.
הוכיחו שאם לכל n מתקיים $0\le a_n,b_n\le 1$, אז $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=1$.

26) תהי $a_n=\langle\sqrt{n}\rangle=\sqrt{n}-[\sqrt{n}]$.
א. הוכיחו כי הסדרה (a_n) חסומה.
ב. מצאו את $\inf\{a_n\,|\,n\in\mathbb{N}\}$ ו- $\underline{\lim_{n\to\infty}}a_n$, וקבעו האם ל- $\{a_n\,|\,n\in\mathbb{N}\}$ יש מינימום.
ג. הוכיחו כי לכל n מתקיים $\langle\sqrt{n^2-1}\rangle=\sqrt{n^2-1}-n+1$.
ד. הוכיחו כי $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-1}-(n-1)\right)=1$.
ה. היעזרו בסעיפים ג' ו-ד', כדי להוכיח ש- $L=1$ הוא גבול חלקי של (a_n).
ו. מצאו את $\sup\{a_n\,|\,n\in\mathbb{N}\}$ ואת $\overline{\lim_{n\to\infty}}a_n$, וקבעו האם ל- $\{a_n\,|\,n\in\mathbb{N}\}$
יש מקסימום.

27) תהי $(a_n)=\left(n-\sqrt{n}\left[\sqrt{n}\right]\right)$.

א. הוכיחו כי הסדרה (a_n) חסומה מלרע.

ב. הוכיחו ש- 0 הוא גבול חלקי של (a_n).

ג. מצאו את $\inf\{a_n \mid n\in N\}$ ואת $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n$, וקבעו האם ל- $\{a_n \mid n\in N\}$ יש מינימום.

ד. יהי ℓ מספר טבעי.
הוכיחו שכמעט לכל n, מתקיים $n<\sqrt{n^2+2\ell}<n+1$.

ה. יהי ℓ מספר טבעי.
הוכיחו כי $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^2+2\ell}-n\right)=\ell$.

ו. הוכיחו, בעזרת סעיף ה', שכל מספר טבעי הוא גבול חלקי של (a_n).

ז. האם (a_n) חסומה מלעיל?

ח. חשבו את $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n$.

ט. מצאו את $\sup\{a_n \mid n\in\mathbb{N}\}$, וקבעו האם לקבוצה $\{a_n \mid n\in\mathbb{N}\}$ יש מקסימום.

תשובות סופיות

1) א. הסדרה שואפת לאינסוף.
ב. לסדרה אין גבול. הגבולות החלקיים של הסדרה הם אינסוף ומינוס אינסוף.
ג. לסדרה אין גבול. הגבולות החלקיים היחידים של הסדרה הם $\pm\frac{1}{e}$.

2) א. לסדרה אין גבול. הגבולות החלקיים היחידים של הסדרה הם 0, -1.
ב. הגבול של הסדרה הוא 0.
ג. לסדרה אין גבול. הגבולות החלקיים היחידים של הסדרה הם $0, 0.25, 0.5, 0.75$.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il